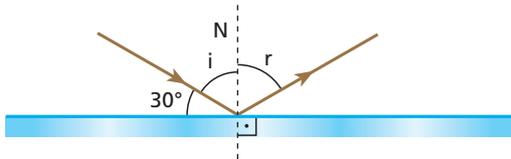


Tópico 2

1 E.R. Um raio luminoso incide sobre um espelho plano formando um ângulo de 30° com sua superfície refletora. Qual o ângulo formado entre os raios incidente e refletido?

Resolução:

A figura a seguir ilustra a situação proposta:



O ângulo procurado é α , dado por: $\alpha = i + r$.

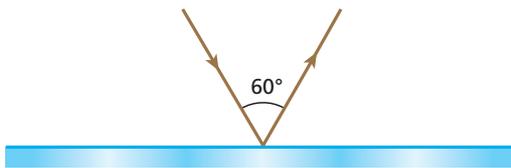
Porém, conforme a **2ª Lei da Reflexão**, $r = i$ (o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência). Logo:

$$\alpha = i + i \Rightarrow \alpha = 2i$$

Observando que $30^\circ + i = 90^\circ$, temos: $i = 60^\circ$

Portanto: $\alpha = 2 \cdot 60^\circ \Rightarrow \alpha = 120^\circ$

2 O esquema representa a reflexão de um raio luminoso em um espelho plano:

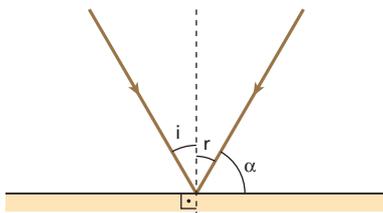


Determine:

- a) o ângulo de incidência da luz;
- b) o ângulo formado entre o raio refletido e o espelho.

Resolução:

a)



$$i + r = 60^\circ$$

2ª Lei da Reflexão: $r = i$

$$i + i = 60^\circ \Rightarrow 2i = 60^\circ$$

$$i = 30^\circ$$

b) $r + \alpha = 90^\circ$

$$i + \alpha = 90^\circ \Rightarrow 30^\circ + \alpha = 90^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ$$

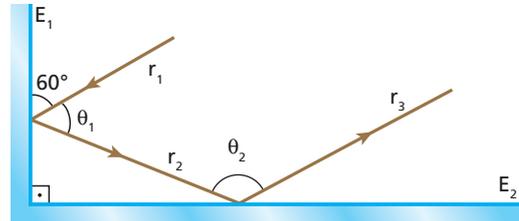
Respostas: a) 30° ; b) 60°

3 (Esam-RN) Na figura a seguir, considere:

E_1 – espelho plano vertical

E_2 – espelho plano horizontal

r_1, r_2 e r_3 – segmentos de um raio luminoso que incide sucessivamente em E_1 e E_2



Nas condições indicadas, quanto valem, respectivamente, os ângulos θ_1 e θ_2 ?

Resolução:

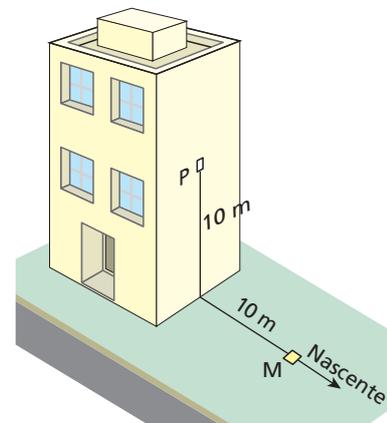
$$\theta_1 + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow \theta_1 = 60^\circ$$

$$\theta_2 + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow \theta_2 = 120^\circ$$

É interessante chamar a atenção para o fato de que, sendo E_1 e E_2 perpendiculares, r_3 é paralelo a r_1 .

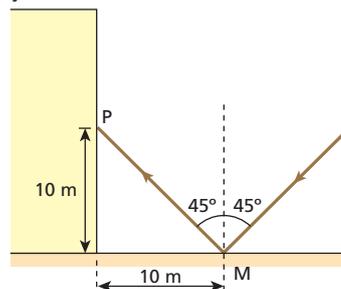
Respostas: $\theta_1 = 60^\circ$ e $\theta_2 = 120^\circ$

4 Observe a figura:



Em um dia de céu claro, o Sol estava no horizonte (0°) às 6 h da manhã. Às 12 h, ele se encontrava no zênite (90°). A que horas a luz solar, refletida no espelhinho plano M deitado sobre o solo, atingiu o ponto P ?

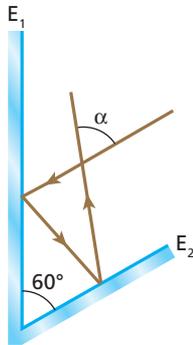
Resolução:



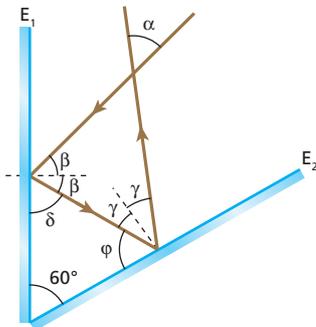
$$\begin{aligned} 90^\circ & \text{--- } 6 \text{ h} \\ 45^\circ & \text{--- } \Delta t \\ \Delta t & = 3 \text{ h} \\ \Delta t & = t - t_0 \\ 3 & = t - 6 \\ \mathbf{t} & = 9 \text{ h} \end{aligned}$$

Resposta: 9 h

5 Dois espelhos planos formam entre si um ângulo de 60° . Um raio de luz monocromática incide no espelho E_1 , reflete-se, incide no espelho E_2 , reflete-se e emerge do sistema conforme ilustra a figura. Qual o valor do ângulo α ? O valor de α depende do ângulo de incidência da luz em E_1 ?



Resolução:



$$2\beta + 2\gamma + \alpha = 180^\circ \Rightarrow 2(\beta + \gamma) + \alpha = 180^\circ \quad (I)$$

$$\beta + \delta = 90^\circ \Rightarrow \delta = 90^\circ - \beta \quad (II)$$

$$\gamma + \phi = 90^\circ \Rightarrow \phi = 90^\circ - \gamma \quad (III)$$

$$\delta + \phi + 60^\circ = 180^\circ \quad (IV)$$

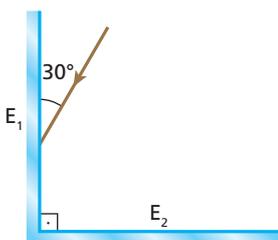
(II) e (III) em (IV):
 $90^\circ - \beta + 90^\circ - \gamma + 60^\circ = 180^\circ$
 $\beta + \gamma = 60^\circ \quad (V)$

(V) em (I): $2 \cdot 60^\circ + \alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ - 120^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

O valor de α depende do valor de β .

Respostas: $\alpha = 60^\circ$ e O valor de α independe do valor de β .

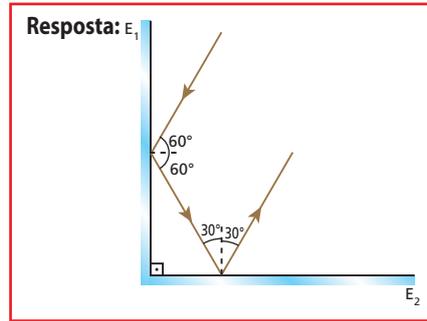
6 Na figura, os espelhos planos E_1 e E_2 são perpendiculares. Um raio luminoso incide no espelho E_1 formando 30° com a superfície refletora, conforme está indicado:



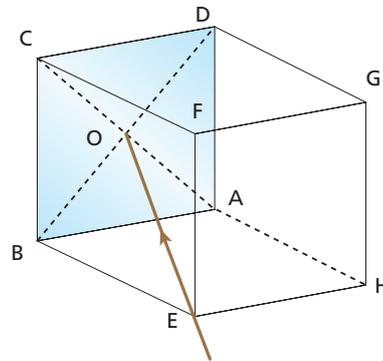
Copie a figura em seu caderno e represente a trajetória da luz até que esta deixe o sistema de espelhos.

Resolução:

Comentar que, sendo os espelhos perpendiculares, o raio emergente do sistema é paralelo ao raio incidente.



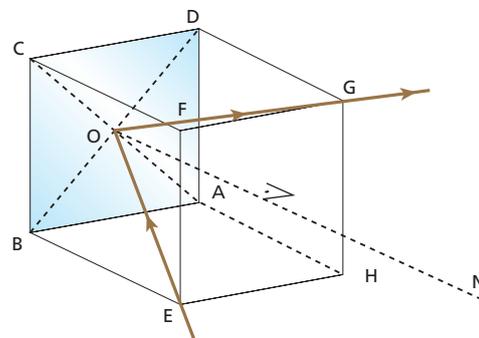
7 Considere a caixa cúbica representada abaixo, em que a face ABCD é espelhada, de tal modo que a superfície refletora seja voltada para dentro da caixa. Suponha que um raio luminoso penetre na caixa pelo vértice E e incida no ponto O , centro do espelho.



Você poderá, então, afirmar que o correspondente raio refletido sairá da caixa pelo vértice:

- a) C;
- b) G;
- c) F;
- d) H;
- e) A.

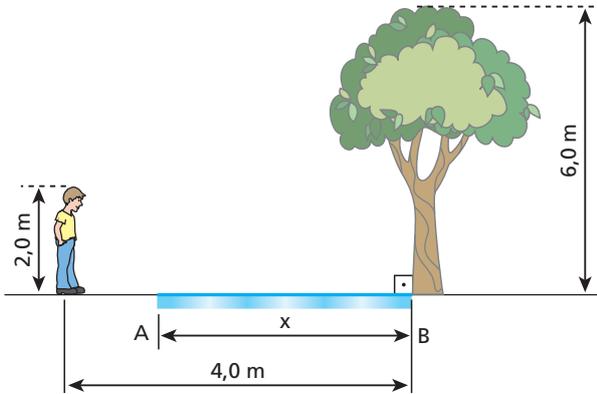
Resolução:



Pela 1ª Lei da Reflexão, o raio incidente, o raio refletido e a reta normal no ponto de incidência devem ser coplanares.

Resposta: b

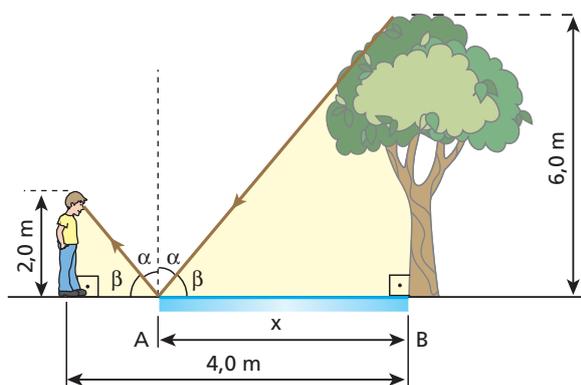
8 E.R. No esquema, o observador deseja visar a imagem da árvore por meio do espelho plano **AB** deitado sobre o solo:



Qual deve ser o menor comprimento **x** do espelho para que o observador veja a imagem completa da árvore, isto é, do topo até o pé?

Resolução:

Se o comprimento **x** do espelho é o menor possível, para que o observador veja a imagem completa da árvore, um raio de luz proveniente do seu topo deve refletir-se na borda esquerda do espelho e atingir o olho do observador, conforme o esquema a seguir.



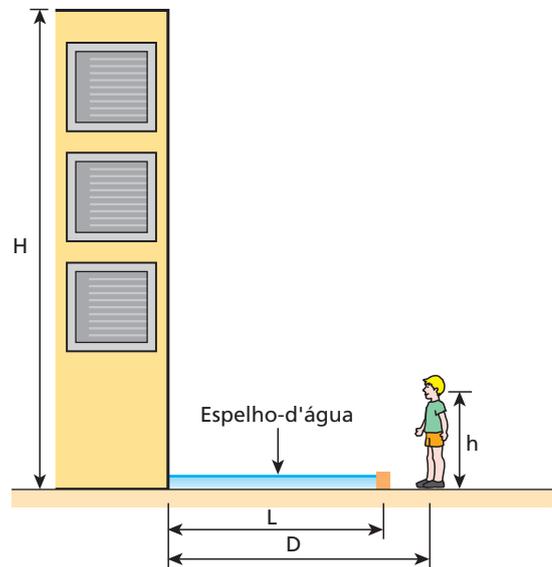
Os triângulos retângulos destacados são semelhantes. Logo:

$$\frac{x}{4,0 - x} = \frac{6}{2,0} \Rightarrow x = 3,0(4,0 - x)$$

$$x = 12 - 3,0x \Rightarrow 4,0x = 12$$

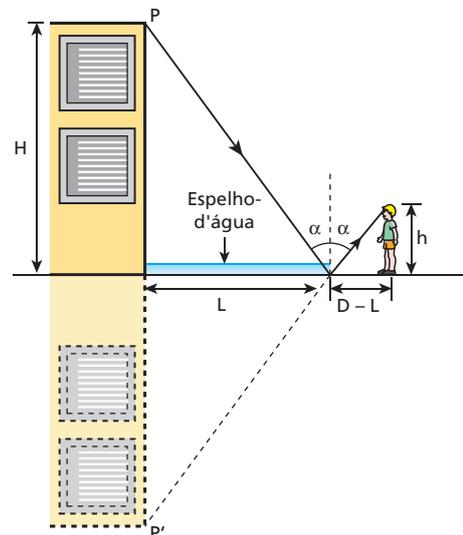
$$x = 3,0 \text{ m}$$

9 Um garoto, cujo globo ocular está a uma altura **h** em relação ao solo, observa que a imagem completa de um prédio de altura **H**, situado a uma distância **D** da vertical do seu corpo, abrange toda a extensão **L** de um espelho-d'água existente defronte do prédio.



Sabendo que $h = 1,5 \text{ m}$, $L = 3,2 \text{ m}$ e $D = 3,6 \text{ m}$, calcule o valor de **H**.

Resolução:

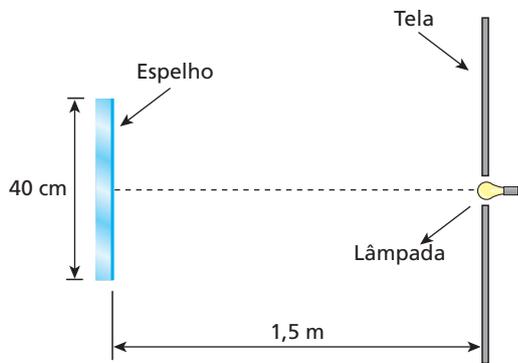


Por semelhança de triângulos:

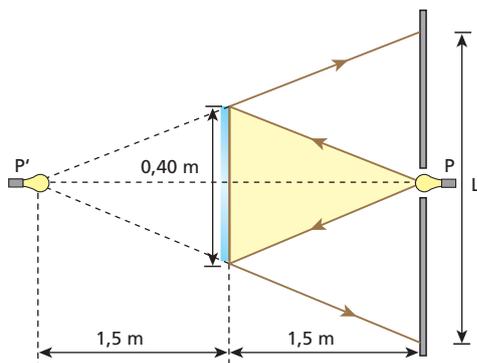
$$\frac{H}{h} = \frac{L}{D - L} \Rightarrow \frac{H}{1,5} = \frac{3,2}{0,40} \Rightarrow H = 12 \text{ m}$$

Resposta: 12 m

10 Uma tela opaca de grandes dimensões apresenta um pequeno furo onde está instalada uma lâmpada pontual de grande potência. Um espelho plano quadrado de lado igual a 40 cm é fixado paralelamente à tela, a 1,5 m de distância em relação a ela, conforme representa a figura. Desconsiderando a existência de outras fontes de luz no local do experimento, determine, em metros quadrados, a área iluminada na tela.



Resolução:

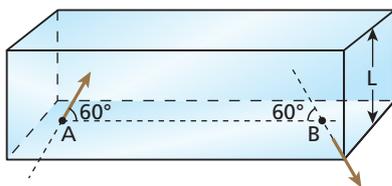


$$\frac{L}{0,40} = \frac{3,0}{1,5} \Rightarrow L = 0,80 \text{ m}$$

$$A = L^2 = (0,80 \text{ m})^2 \Rightarrow A = 0,64 \text{ m}^2$$

Resposta: 0,64 m²

11 (Fuvest-SP) Um feixe de luz entra em uma caixa retangular de altura L , espelhada internamente, através de uma abertura A . O feixe, após sofrer 5 reflexões, sai da caixa por um orifício B depois de decorrido $1,0 \cdot 10^{-8}$ segundo.

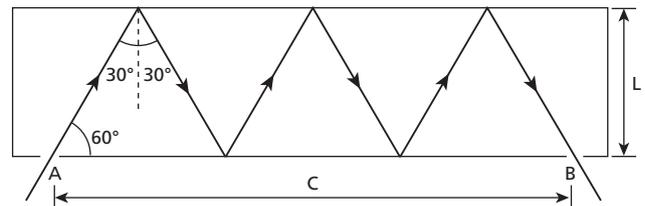


Os ângulos formados pela direção do feixe e o segmento AB estão indicados na figura.

- Calcule o comprimento do segmento AB . **Dado:** $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
- O que acontece com o número de reflexões e com o tempo entre a entrada e a saída do feixe se diminuirmos a altura da caixa L pela metade?

Resolução:

a)

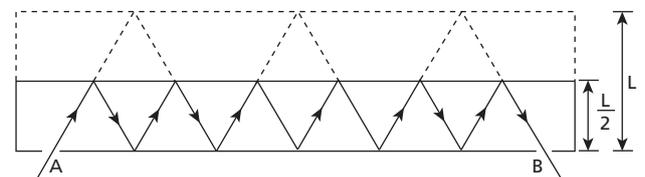


Seja x o comprimento dos lados dos triângulos equiláteros da figura, temos:

$$V = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow c = \frac{6x}{\Delta t} \Rightarrow x = \frac{c\Delta t}{6} \Rightarrow x = \frac{3,0 \cdot 10^8 \cdot 1,0 \cdot 10^{-8}}{6} = \frac{3}{6} \text{ m}$$

$$x = 0,5 \text{ m}$$

b)



O tempo não se altera, pois a distância percorrida pela luz é a mesma. Já o número de reflexões aumenta, passando de 5 para 11 (ver figura).

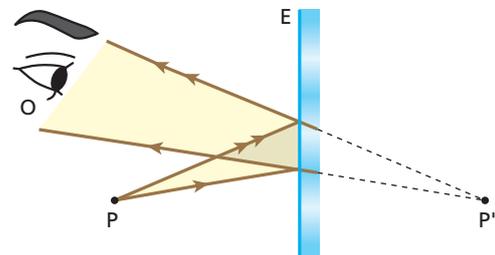
Respostas: a) 1,5 m; b) O tempo não se altera e o número de reflexões passa de 5 para 11.

12 A imagem fornecida por um espelho plano será:

- real, se o objeto for real;
- virtual, se o objeto for virtual;
- virtual, se o objeto for real, e real, se o objeto for virtual;
- sempre virtual;
- sempre real.

Resposta: c

13 Considere o esquema seguinte, no qual P é um ponto luminoso, E é um espelho plano e O é o olho de um observador:



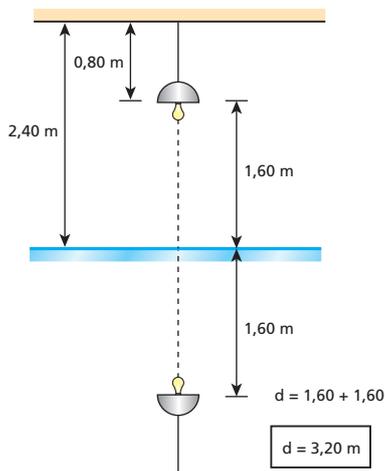
É correto afirmar que:

- em relação a E , P' é imagem real;
- em relação a E , P' é imagem imprópria;
- em relação a O , P' é imagem real;
- em relação a O , P' é imagem virtual;
- em relação a O , P' se comporta como objeto real.

Resposta: e

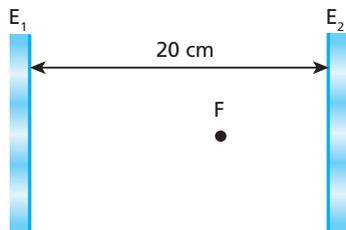
- 14** (Ufal) Um espelho plano está no piso horizontal de uma sala com o lado espelhado voltado para cima. O teto da sala está a 2,40 m de altura e uma lâmpada está a 80 cm do teto. Com esses dados, pode-se concluir que a distância entre a lâmpada e sua imagem formada pelo espelho plano é, em metros, igual a:
- a) 1,20. b) 1,60. c) 2,40. d) 3,20. e) 4,80.

Resolução:



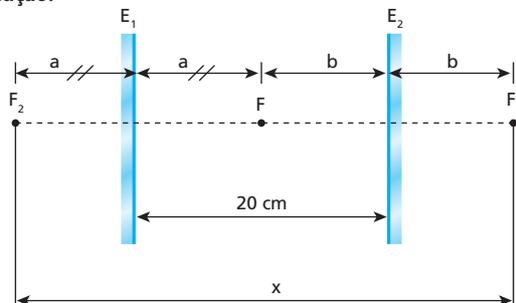
Resposta: d

- 15** (UFF-RJ) Dois espelhos planos paralelos, E_1 e E_2 , estão frente a frente separados pela distância de 20 cm. Entre eles há uma fonte luminosa F , de pequenas dimensões, na posição indicada na figura:



- a) Calcule a distância entre a primeira imagem fornecida pelo espelho E_1 e a primeira imagem fornecida pelo espelho E_2 .
 b) A distância calculada no item **a** depende da posição de F em relação a E_1 e E_2 ?

Resolução:



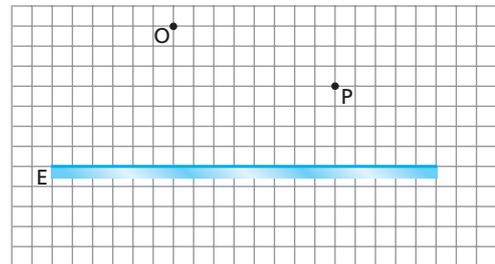
a) $x = 2a + 2b = 2 \cdot (a + b)$

$x = 2 \cdot 20 \text{ cm} \Rightarrow x = 40 \text{ cm}$

- b) x independe da posição de F em relação a E_1 e E_2 .

Respostas: a) 40 cm; b) não depende.

- 16 E.R.** No esquema da figura, P é um ponto luminoso, E é um espelho plano e O é o olho de um observador:



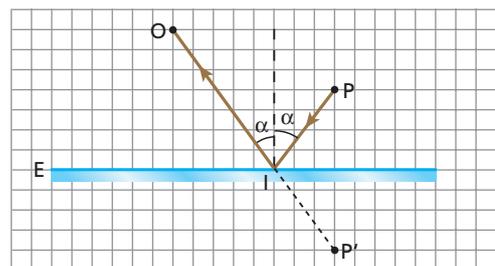
Trace o caminho óptico da luz, que, partindo de P , sofre reflexão em E e atinge O .

Resolução:

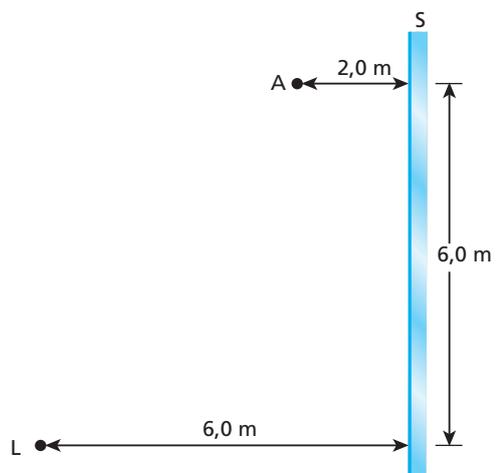
Traçado do raio refletido:

Determina-se, por simetria, a imagem P' , que o espelho conjuga a P . A partir de P' , traça-se a reta $P'O$. O cruzamento dessa reta com o espelho define o ponto de incidência I , e o raio refletido corresponde ao segmento IO .

O raio incidente correspondente ao segmento PI .



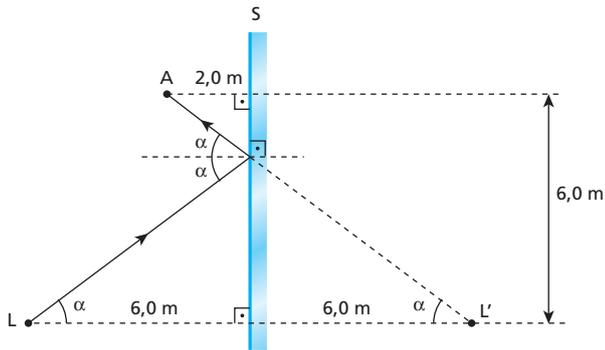
- 17** (Fuvest-SP) A figura representa um objeto A , colocado a uma distância de 2,0 m de um espelho plano S , e uma lâmpada L , colocada à distância de 6,0 m do espelho:



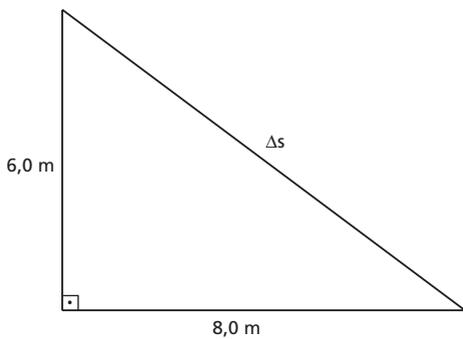
- a) Copie a figura e desenhe o raio emitido por L e refletido por S que atinge A . Explique a construção.
 b) Calcule a distância percorrida por esse raio.

Resolução:

a)



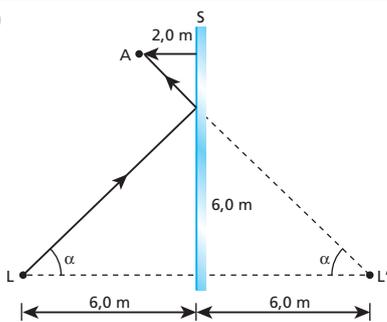
b)



Pitágoras: $\Delta s^2 = (6,0)^2 + (8,0)^2$

$\Delta s = 10 \text{ m}$

Respostas: a)



b) 10 m

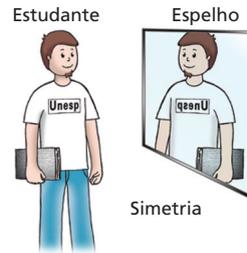
18 (Unesp-SP) Um estudante veste uma camiseta em cujo peito se lê a inscrição seguinte:

UNESP

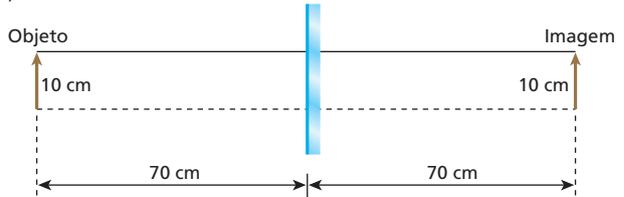
- a) De que forma a imagem dessa inscrição aparece para o estudante quando ele se encontra frente a um espelho plano?
- b) Suponha que a inscrição esteja a 70 cm do espelho e que cada letra da camiseta tenha 10 cm de altura. Qual a distância entre a inscrição e sua imagem? Qual a altura de cada letra da imagem?

Resolução:

a)



b)

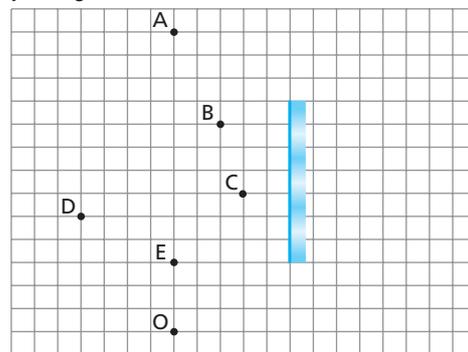


$d = 70 + 70 \text{ (cm)}$

$d = 140 \text{ cm}$

Respostas: a) 9231U; b) 140 cm; 10 cm

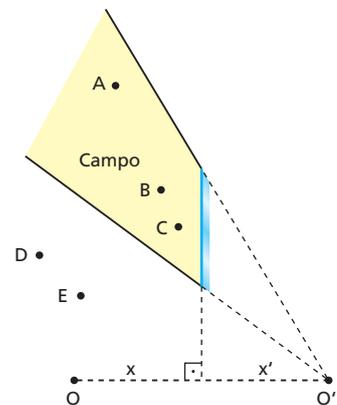
19 O esquema representa um espelho plano diante do qual se encontram cinco objetos luminosos: **A, B, C, D** e **E**. O ponto **O** corresponde à posição do globo ocular de um observador.



Que ponto (ou pontos) o observador **não poderá** ver pela reflexão da luz no espelho?

Resolução:

O observador não poderá vislumbrar os pontos **D** e **E** nem seu próprio olho, pois eles estão fora do campo visual do espelho para a posição do observador.



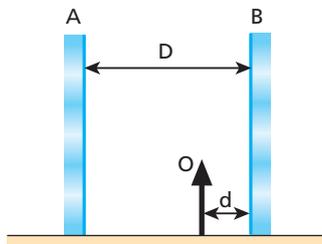
Resposta: Ele não poderá ver os pontos **D** e **E**, da mesma maneira que não verá a imagem do seu olho.

20 (UFPR) Um espelho plano fornece, de um dado objeto em relação ao espelho, uma imagem real, projetável sobre um anteparo. Pode-se, então, afirmar, sobre o objeto e sobre o feixe incidente que o define, respectivamente, que:

- a) é real e divergente.
- b) é virtual e convergente.
- c) é virtual e divergente.
- d) é real e convergente.
- e) é real e paralelo.

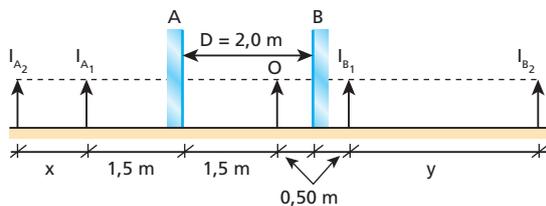
Resposta: b

21 (UFPI) Dois espelhos planos, paralelos, um defronte ao outro, estão separados por uma distância $D = 2,0$ m. O objeto O está situado entre eles, a uma distância $d = 0,50$ m de B (veja a figura a seguir). A distância que separa as duas primeiras imagens formadas em A e a distância que separa as duas primeiras imagens formadas em B são, respectivamente:



- a) 0,50 m e 1,5 m.
- b) 1,5 m e 3,5 m.
- c) 2,0 m e 4,0 m.
- d) 1,0 m e 3,0 m.
- e) 2,0 m e 2,0 m.

Resolução:



I_{A_2} é a imagem que A conjuga a I_{B_1} . Logo:

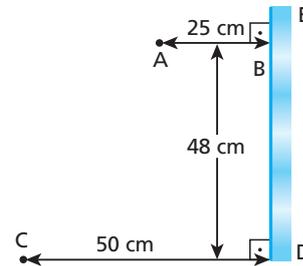
$$x = 2 \cdot 0,5 \Rightarrow \boxed{x = 1,0 \text{ m}}$$

I_{B_2} é a imagem que B conjuga a I_{A_1} . Logo:

$$y = 2 \cdot 1,5 \Rightarrow \boxed{y = 3,0 \text{ m}}$$

Resposta: d

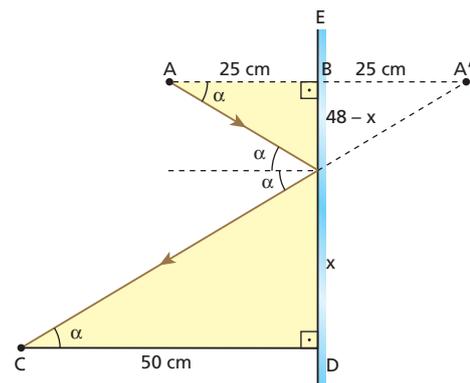
22 (UEL-PR) A figura representa um espelho plano E vertical e dois segmentos de reta AB e CD perpendiculares ao espelho:



Supondo que um raio de luz parta de A e atinja C por reflexão no espelho, o ponto de incidência do raio de luz no espelho dista de D , em centímetros:

- a) 48.
- b) 40.
- c) 32.
- d) 24.
- e) 16.

Resolução:



Os triângulos destacados são semelhantes.

Logo:

$$\frac{x}{48 - x} = \frac{50}{25}$$

$$x = 2(48 - x)$$

$$x = 96 - 2x \Rightarrow 3x = 96 \Rightarrow \boxed{x = 32 \text{ cm}}$$

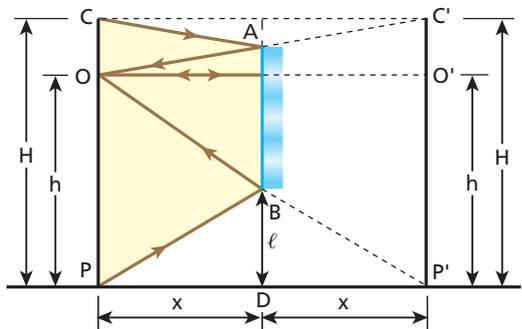
Resposta: c

23 E.R. Um observador de altura H deseja mirar-se de corpo inteiro, utilizando para tanto um espelho plano circular disposto verticalmente. Sendo h a altura de seus olhos em relação ao solo, plano e horizontal:

- a) calcule o mínimo diâmetro d que o espelho deve ter para que o observador realize seu intento;
- b) obtenha a distância ℓ do extremo inferior do espelho ao solo;
- c) responda: as dimensões d e ℓ dependem ou não da distância x do observador em relação ao espelho?

Resolução:

Nas condições do esquema seguinte, o observador CP consegue mirar-se de corpo inteiro, utilizando para isso o espelho plano com diâmetro mínimo:



Observe na figura:

- C = extremo superior da cabeça do observador
- O = olho do observador
- P = extremo inferior do pé do observador
- C', O' e P' = imagens de C, O e P, respectivamente, fornecidas pelo espelho
- AB = espelho (AB = d)

a) Os triângulos OAB e OC'P' são semelhantes. Por isso:

$$\frac{d}{H} = \frac{x}{2x} \Rightarrow \boxed{d = \frac{H}{2}}$$

O diâmetro mínimo do espelho deve corresponder à metade da altura do observador.

b) Os triângulos OPP' e BDP' são semelhantes. Por isso:

$$\frac{\ell}{h} = \frac{x}{2x} \Rightarrow \boxed{\ell = \frac{h}{2}}$$

A distância do extremo inferior do espelho ao solo deve corresponder à metade da altura dos olhos do observador.

c) As dimensões **d** e **ℓ** independem de **x**, que foi cancelado nos cálculos.

24 Um homem com 1,80 m de altura deseja mirar-se dos pés à cabeça em um espelho plano quadrado, disposto verticalmente e com sua base paralela ao solo. Sendo a altura de seus olhos ao solo igual a 1,70 m, calcule:

- a) a menor medida admissível para o lado do espelho, a fim de que o homem consiga seu objetivo;
- b) a distância da borda inferior do espelho ao solo, no caso de o homem estar se vendo no espelho de corpo inteiro.

Resolução:

a) $d = \frac{H}{2} \Rightarrow d = \frac{1,80 \text{ m}}{2}$

$\boxed{d = 0,90 \text{ m} = 90 \text{ cm}}$

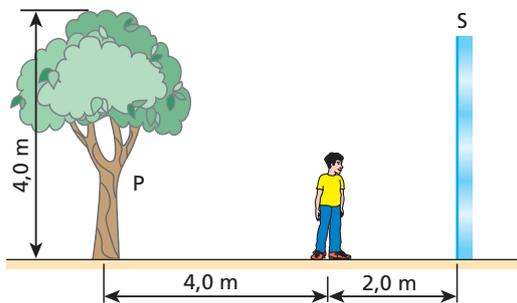
b) $\ell = \frac{h}{2} \Rightarrow \ell = \frac{1,70}{2}$

$\boxed{\ell = 0,85 \text{ m} = 85 \text{ cm}}$

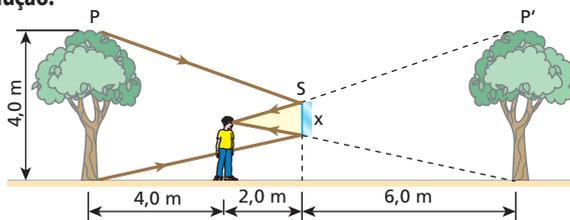
Ver maiores detalhes no **ER 23** do livro.

Respostas: a) 90 cm; b) 85 cm

25 O esquema abaixo representa um homem de frente para um espelho plano **S**, vertical, e de costas para uma árvore **P**, de altura igual a 4,0 m. Qual deverá ser o comprimento mínimo do espelho para que o homem possa ver nele a imagem completa da árvore?



Resolução:

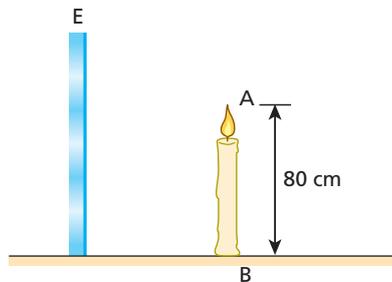


Semelhança de triângulos:

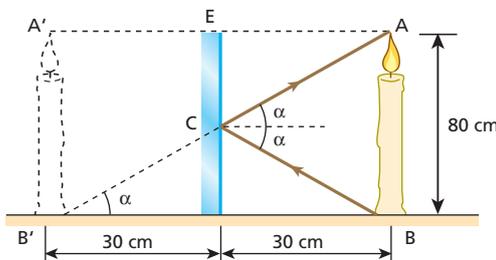
$$\frac{x}{2,0} = \frac{4,0}{8,0} \Rightarrow \boxed{x = 1,0 \text{ m}}$$

Resposta: 1,0 m

26 (FEI-SP) Um objeto vertical AB, de altura $\overline{AB} = 80 \text{ cm}$, encontra-se diante de um espelho plano vertical E. Sabe-se que a imagem do ponto B se encontra a 30 cm do espelho. Um raio de luz, partindo do ponto B, encontra o espelho num ponto C, segundo um ângulo de incidência α , e reflete-se passando pelo ponto A. Qual o valor de $\text{sen } \alpha$?



Resolução:

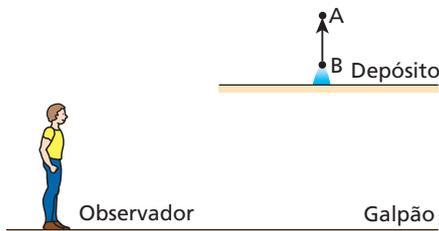


Teorema de Pitágoras
 $(\overline{AB'})^2 = 80^2 + 60^2 \Rightarrow \overline{AB'} = 100 \text{ cm}$

$$\text{sen } \alpha = \frac{80}{100} \Rightarrow \boxed{\text{sen } \alpha = 0,80}$$

Resposta: $\text{sen } \alpha = 0,80$

27 E.R. Numa fábrica, um galpão tem o teto parcialmente rebaixado, criando um compartimento superior que é utilizado como depósito. Para ter acesso visual a esse compartimento, constrói-se um sistema óptico simples, com dois espelhos planos E_1 e E_2 , de modo que um observador no andar de baixo possa ver as imagens dos objetos guardados no depósito (como o objeto AB, por exemplo).



São possíveis duas configurações. Na primeira, os espelhos são paralelos, ambos formando 45° com a horizontal, como mostra a figura 1:

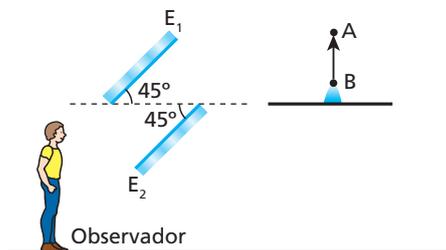


Figura 1

Na outra, os espelhos são perpendiculares entre si, ambos formando 45° com a horizontal, como mostra a figura 2:

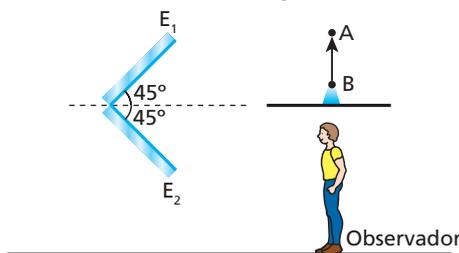


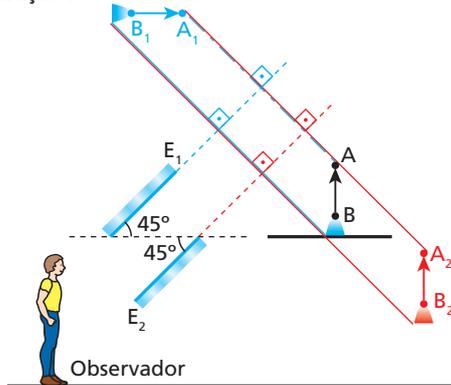
Figura 2

Posicione em cada configuração as imagens A_1B_1 e A_2B_2 fornecidas por E_1 e E_2 , respectivamente, e responda: as imagens visadas pelo observador são **direitas** ou **invertidas** em relação ao objeto AB?

Resolução:

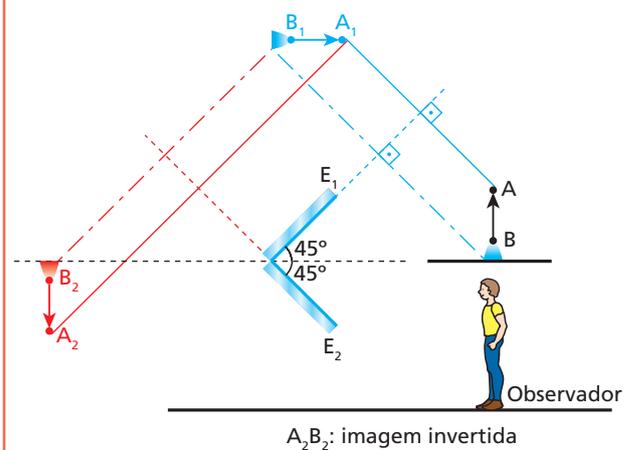
O posicionamento das imagens é feito observando-se a Propriedade Fundamental dos Espelhos Planos: a imagem é **simétrica** do objeto em relação à superfície refletora.

Configuração 1:



A_2B_2 : imagem direita

Configuração 2:

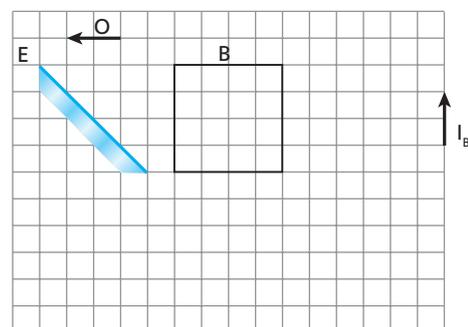
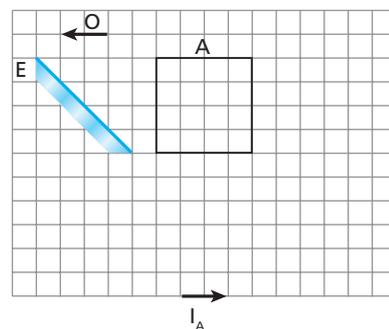


A_2B_2 : imagem invertida

Nota:

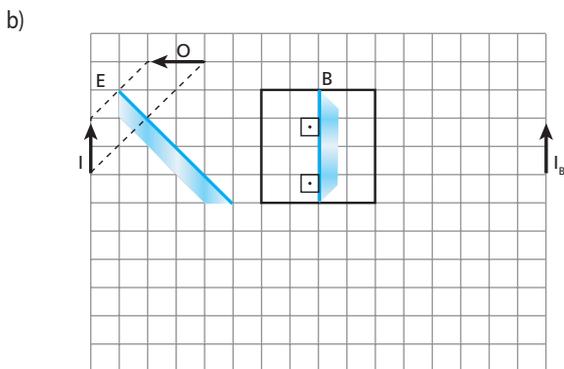
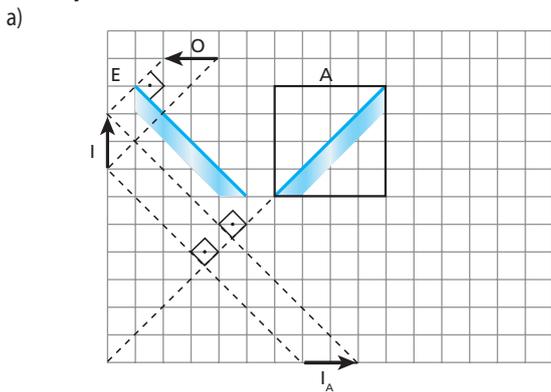
• Em ambas as configurações, a imagem A_1B_1 fornecida pelo espelho E_1 para o objeto AB funciona como **objeto** para o espelho E_2 .

28 (Vunesp-SP) As figuras a seguir mostram a posição de um objeto **O** em relação a um espelho plano **E** e duas regiões delimitadas pelos quadrados **A** e **B**. Dentro de cada uma dessas regiões deve-se colocar um outro espelho plano, de modo que se obtenham as imagens I_A e I_B indicadas nas figuras.

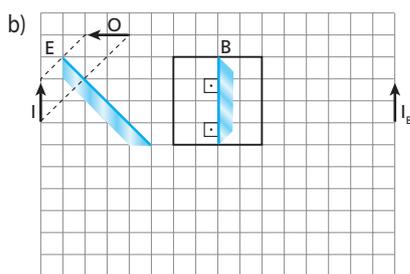
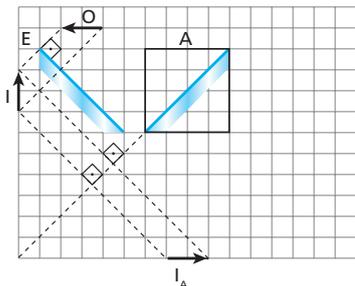


- Copie o quadrado **A** numa folha. Em seguida, posicione no interior do quadrado um espelho plano capaz de criar a imagem I_A indicada na primeira figura.
- Copie o quadrado **B** numa folha. Em seguida, posicione no interior do quadrado um espelho plano capaz de criar a imagem I_B indicada na segunda figura.

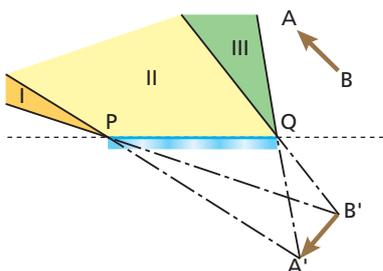
Resolução:



Respostas: a)



29 No esquema seguinte, PQ é um espelho plano, AB é um objeto linear e A'B' é a imagem de AB conjugada pelo espelho:



Para que um observador de dimensões desprezíveis veja a imagem A'B' inteira, deve colocar-se:

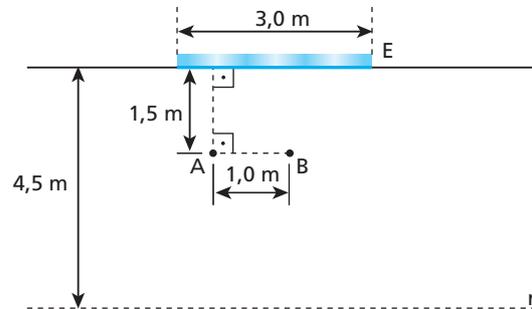
- a) nas regiões I, II ou III, indiferentemente;
- b) nas regiões I ou II, indiferentemente;
- c) exclusivamente na região I;
- d) exclusivamente na região II;
- e) exclusivamente na região III.

Resolução:

O observador deve colocar-se na região da intersecção dos campos do espelho correspondentes às extremidades A e B do objeto.

Resposta: d

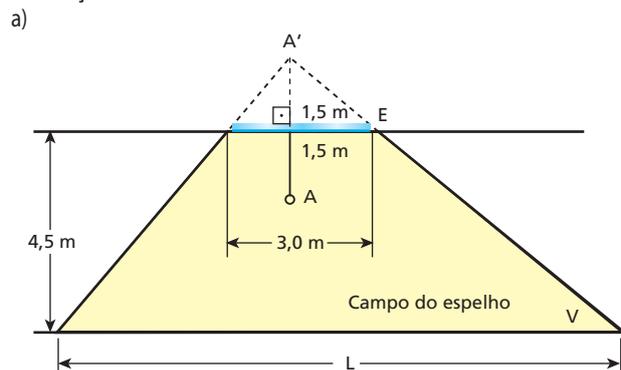
30 Juliana está parada no ponto A, indicado na figura a seguir, contemplando sua imagem num espelho plano vertical E, de largura 3,0 m. Rodrigo, um colega de classe, vem caminhando ao longo da reta r, paralela à superfície refletora do espelho, com velocidade de intensidade 2,0 m/s.



Desprezando-se as dimensões de Juliana e de Rodrigo, responda:

- a) Por quanto tempo Juliana poderá observar a imagem de Rodrigo em E?
- b) Se Juliana estivesse na posição B, qual seria o tempo de observação da imagem de Rodrigo?

Resolução:



(I) Semelhança de triângulos:

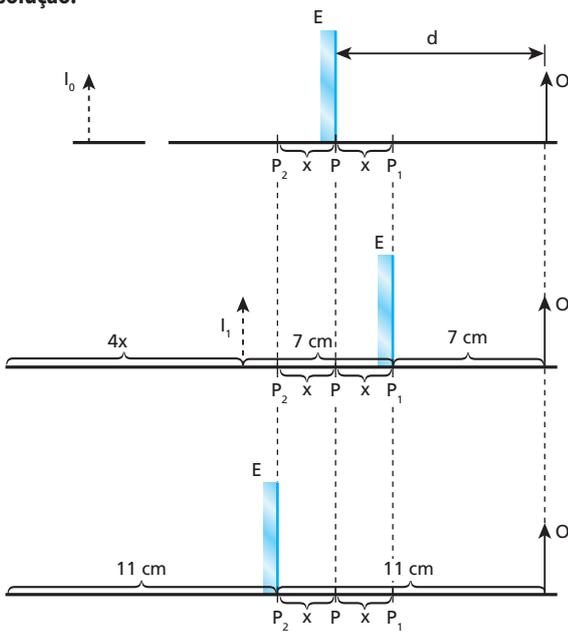
$$\frac{L}{3,0 \text{ m}} = \frac{(4,5 + 1,5) \text{ m}}{1,5 \text{ m}} \Rightarrow \boxed{L = 12 \text{ m}}$$

(II) Juliana poderá observar a imagem de Rodrigo em E, enquanto Rodrigo estiver no campo do espelho representado na figura anterior, isto é, enquanto ele estiver percorrendo o comprimento L.

$$V = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{L}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{L}{V} \Rightarrow \Delta t = \frac{12 \text{ m}}{2 \text{ m/s}}$$

Donde: $\boxed{\Delta t = 6,0 \text{ s}}$

Resolução:



(I) $4x = 2 \cdot 11 - 2 \cdot 7 \text{ (cm)} \Rightarrow x = 2 \text{ m}$
 (II) $d = 7 + x$
 $d = 7 + 2 \text{ (cm)}$
 $d = 9 \text{ cm}$

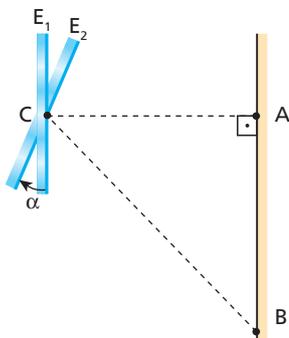
Resposta: b

36 Um caminhão trafega em uma estrada retilínea com velocidade de 40 km/h. Olhando no espelho retrovisor plano, o motorista contempla a imagem de um poste vertical fixo na estrada.

- Qual a velocidade da imagem do poste em relação ao solo?
- Qual a velocidade da imagem do poste em relação ao motorista do caminhão?

Respostas: a) 80 km/h; b) 40 km/h

37 | E.R. A figura a seguir representa um espelho plano que pode girar em torno de um eixo contendo seu centro C.

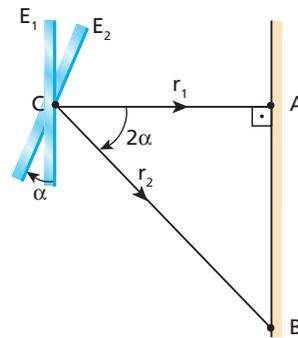


Estando na posição E_1 , o espelho capta a luz proveniente de uma fonte pontual A, fixa no anteparo, refletindo-a de volta ao ponto de partida. O espelho sofre, então, uma rotação equivalente a um ângulo α , passando para a posição E_2 . Nesse caso, ao receber a luz emitida por A, reflete-a para o ponto B.

Sabendo que $AB = \sqrt{3} AC$, calcule o ângulo α .

Resolução:

A figura a seguir representa os raios refletidos r_1 e r_2 que correspondem, respectivamente, às posições E_1 e E_2 do espelho:



No triângulo ABC, temos:

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{AB}{AC}$$

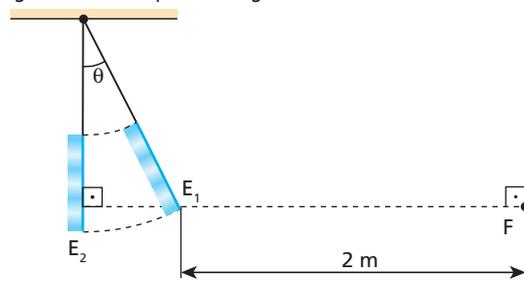
Mas, sendo $AB = \sqrt{3} AC$, vem:

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{\sqrt{3} AC}{AC} \Rightarrow \text{tg } 2\alpha = \sqrt{3}$$

Portanto:

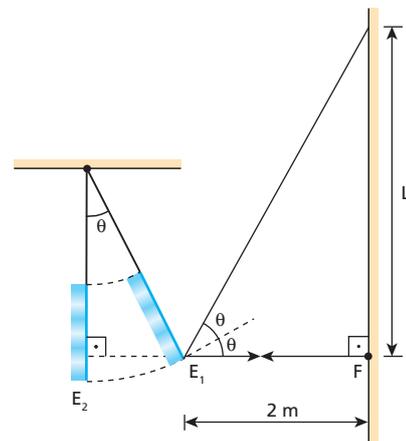
$$2\alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

38 O esquema a seguir representa um pêndulo. Na extremidade do fio, está preso um espelho plano. Incrustada no anteparo há uma lâmpada pontual F que emite um pincel luminoso cilíndrico na direção horizontal para a esquerda. O pêndulo é posto a oscilar, fazendo com que o espelho passe pelas posições E_1 e E_2 e varra, de uma para a outra, um ângulo $\theta = 30^\circ$ no plano da figura:



Calcule a extensão do anteparo percorrida pelo pincel luminoso proveniente de F e refletido pelo espelho, quando o espelho vai de E_1 para E_2 .

Resolução:



A rotação do raio refletido é o dobro da do espelho.

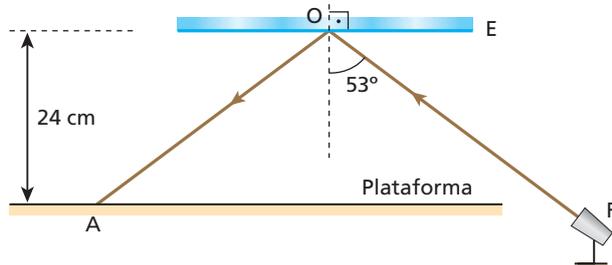
$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{L}{E_1 F} \Rightarrow \operatorname{tg} (2 \cdot 30^\circ) = \frac{L}{2}$$

$$L = 2 \operatorname{tg} 60^\circ \Rightarrow \boxed{L = 2\sqrt{3} \text{ m}}$$

Resposta: $2\sqrt{3} \text{ m}$

39 Na situação esquematizada a seguir, **F** é uma pequena lanterna fixa que emite um estreito feixe cilíndrico de luz e **E** é um espelho plano que pode girar em torno de um eixo **O** perpendicular ao plano desta página.

Inicialmente, a luz proveniente de **F** incide em **E** sob um ângulo de 53° , como indica a figura, produzindo um feixe refletido que ilumina o ponto **A** de uma plataforma também fixa.

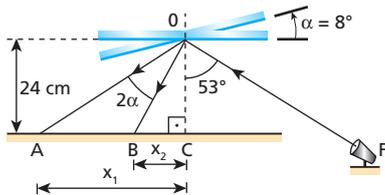


O espelho sofre, então, uma rotação de 8° no sentido anti-horário, fazendo com que o feixe refletido atinja um outro ponto **B** da mesma plataforma.

Sabendo-se que $\operatorname{sen} 53^\circ = \operatorname{cos} 37^\circ = 0,80$ e $\operatorname{cos} 53^\circ = \operatorname{sen} 37^\circ = 0,60$, pode-se afirmar que a distância entre os pontos **A** e **B** vale:

- a) 32 cm; c) 18 cm; e) 12 cm.
b) 24 cm; d) 14 cm;

Resolução:



(I) Triângulo OAC: $\operatorname{tg} 53^\circ = \frac{x_1}{24}$

$$\frac{\operatorname{sen} 53^\circ}{\operatorname{cos} 53^\circ} = \frac{x_1}{24} \Rightarrow \frac{0,80}{0,60} = \frac{x_1}{24} \Rightarrow \boxed{x_1 = 32 \text{ cm}}$$

(II) Triângulo OBC: $\operatorname{tg} (53^\circ - 2\alpha) = \frac{x_2}{24}$

$$\operatorname{tg} (53^\circ - 16^\circ) = \frac{x_2}{24} \Rightarrow \operatorname{tg} 37^\circ = \frac{x_2}{24} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} 37^\circ}{\operatorname{cos} 37^\circ} = \frac{x_2}{24}$$

$$\frac{0,60}{0,80} = \frac{x_2}{24}$$

Da qual: $\boxed{x_2 = 18 \text{ cm}}$

(III) $AB = x_1 - x_2 \Rightarrow AB = (32 - 18) \text{ cm}$

$$\boxed{AB = 14 \text{ cm}}$$

Resposta: d

40 Um diretor de cinema registrou uma cena em que apareceram 24 bailarinas. Ele utilizou na filmagem apenas três atrizes, trajadas com a mesma roupa, colocadas diante de uma associação de dois espelhos planos verticais cujas superfícies refletoras formavam entre si um ângulo diedro α . Qual o valor de α ?

Resolução:

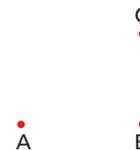
Das 24 "bailarinas" filmadas, 3 são pessoas (atrizes) e 21 são imagens. Assim, cada atriz determina, na associação de espelhos, um total de 7 imagens.

$$\text{Logo: } n = \frac{360^\circ}{\alpha} - 1 \Rightarrow 7 = \frac{360}{\alpha} - 1$$

$$8\alpha = 360 \Rightarrow \boxed{\alpha = 45^\circ}$$

Resposta: 45°

41 (Fuvest-SP) Tem-se um objeto **O** em frente a dois espelhos planos perpendiculares entre si. Os pontos **A**, **B** e **C** correspondem às imagens formadas do referido objeto. A distância **AB** é igual a 80 cm e a distância **BC**, igual a 60 cm.



- a) Qual a distância entre o objeto e a imagem **B**?
b) Desenhe em uma folha de papel o esquema com os espelhos, o objeto e as imagens.

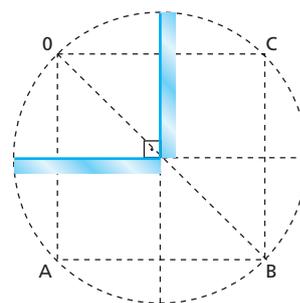
Resolução:

a) Teorema de Pitágoras

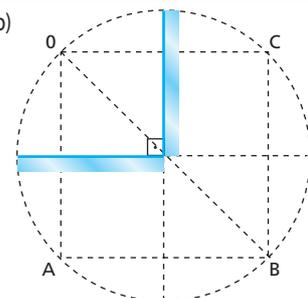
$$OB^2 = 80^2 + 60^2$$

Do qual: $\boxed{OB = 100 \text{ cm}}$

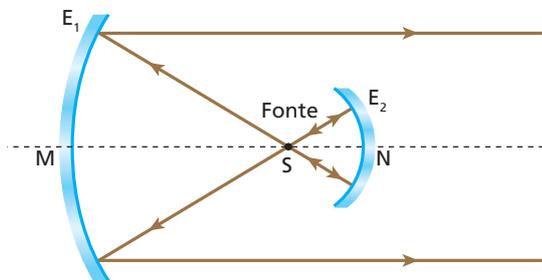
b)



Respostas: a) 100 cm; b)



42 (Cesgranrio-RJ) Em um farol de automóvel, dois espelhos esféricos são utilizados para se obter um feixe de luz paralelo a partir de uma fonte aproximadamente pontual. O espelho principal E_1 tem 16,0 cm de raio. O espelho auxiliar E_2 tem 2,0 cm de raio. Para que o feixe produzido seja efetivamente paralelo, as distâncias da fonte S aos vértices M e N dos espelhos devem ser iguais, respectivamente, a:



- | | |
|---------------------|---------------------|
| Distância SM | Distância SN |
| a) 8,0 cm. | 1,0 cm. |
| b) 16,0 cm. | 2,0 cm. |
| c) 16,0 cm. | 1,0 cm. |
| d) 8,0 cm. | 2,0 cm. |
| e) 8,0 cm. | 4,0 cm. |

Resolução:
O ponto S em que a fonte de luz está colocada é o foco principal de E_1 e também o centro de curvatura de E_2 ; logo:

$$SM = f_1 = \frac{R_1}{2}$$

$$SM = \frac{16,0 \text{ cm}}{2} \Rightarrow \boxed{SM = 8,0 \text{ cm}}$$

$$SN = R_2 \Rightarrow \boxed{SN = 2,0 \text{ cm}}$$

Resposta: d

43 (Mack-SP) A imagem de um objeto que está a 40 cm de um espelho esférico côncavo tem a mesma altura do objeto. Colocando o objeto a grande distância do espelho, sua imagem estará a:

- | | |
|----------------------|----------------------|
| a) 60 cm do espelho. | d) 30 cm do espelho. |
| b) 50 cm do espelho. | e) 20 cm do espelho. |
| c) 40 cm do espelho. | |

Resolução:
(I) Este é o caso em que o objeto e a imagem estão posicionados na região do centro de curvatura do espelho. Assim:

$$\boxed{R = 40 \text{ cm}}$$

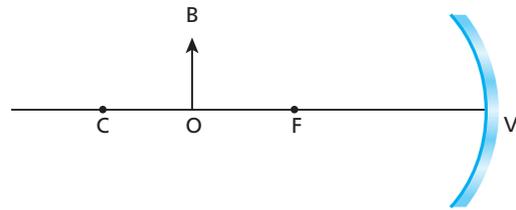
(II) Agora, o objeto deve ser considerado impróprio e sua imagem se forma em um dos focos do espelho.

$$d = f \Rightarrow d = \frac{R}{2}$$

$$d = \frac{40 \text{ cm}}{2} \Rightarrow \boxed{d = 20 \text{ cm}}$$

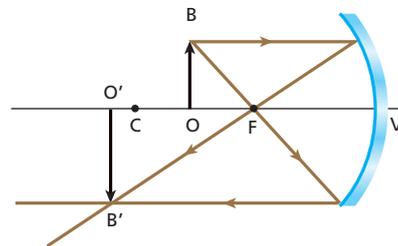
Resposta: e

44 (PUC-SP) A figura mostra um espelho esférico côncavo, em que C é o centro, F é o foco e V é o vértice. Colocando-se um objeto OB entre C e F , sua imagem situa-se:



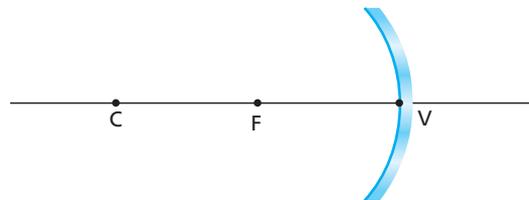
- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| a) à direita de V . | d) entre o objeto e C . |
| b) entre F e V . | e) à esquerda de C . |
| c) entre F e o objeto. | |

Resolução:
Construção gráfica da imagem:



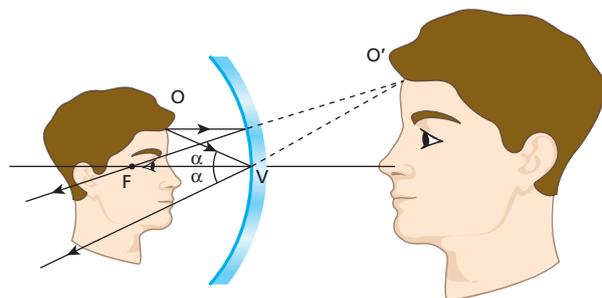
Resposta: e

45 (USF-SP) Quando você se olha em um espelho esférico côncavo, sua imagem é vista direita e ampliada. Nessas condições, você deve estar:



- | |
|---------------------------------------|
| a) além de C , centro de curvatura. |
| b) em C . |
| c) entre C e F , foco. |
| d) em F . |
| e) entre F e V , vértice. |

Resolução:
Construção gráfica da imagem:



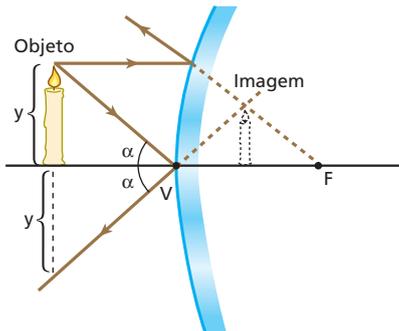
Resposta: e

46 Diante de uma bola de Natal que tem a superfície externa espolhada, um observador dispõe um lápis, que é aproximado e afastado da superfície refletora. A respeito da imagem que a bola conjuga ao lápis, podemos afirmar que:

- a) é virtual, direita e reduzida, qualquer que seja a posição do lápis;
- b) pode ser real ou virtual, dependendo da posição do lápis;
- c) é real, invertida e aumentada, qualquer que seja a posição do lápis;
- d) é simétrica do lápis em relação à superfície refletora;
- e) nenhuma proposição anterior é correta.

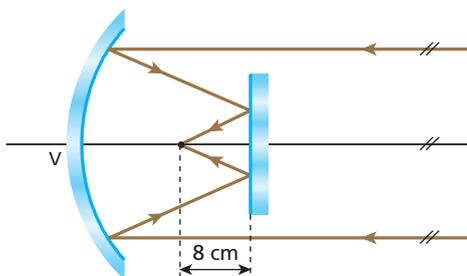
Resolução:

Construção gráfica da imagem:



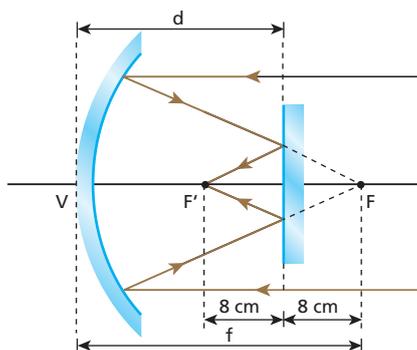
Resposta: a

47 (UFRJ) Um espelho côncavo de raio de curvatura 50 cm e um pequeno espelho plano estão frente a frente. O espelho plano está disposto perpendicularmente ao eixo principal do côncavo. Raios luminosos paralelos ao eixo principal são refletidos pelo espelho côncavo; em seguida, refletem-se também no espelho plano e tornam-se convergentes num ponto do eixo principal distante 8 cm do espelho plano, como mostra a figura.



Calcule a distância do espelho plano ao vértice **V** do espelho côncavo.

Resolução:



$$f = \frac{R}{2} = \frac{50 \text{ cm}}{2} \Rightarrow f = 25 \text{ cm}$$

$$d + 8 = f$$

$$d = f - 8 \Rightarrow d = 25 - 8 \text{ (cm)} \Rightarrow \boxed{d = 17 \text{ cm}}$$

Resposta: 17 cm

48 (Fatec-SP) Desloca-se uma pequena lâmpada acesa ao longo do eixo principal de um espelho esférico côncavo, até que a posição da imagem formada pelo espelho coincida com a posição do objeto. Nesse caso, a imagem é invertida e a distância da lâmpada ao espelho é de 24 cm. Qual a distância focal do espelho?

Resolução:

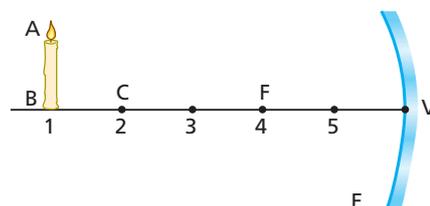
A lâmpada e sua imagem estão situadas no plano frontal que contém o centro de curvatura do espelho; logo:

$$f = \frac{R}{2} \Rightarrow f = \frac{24 \text{ cm}}{2}$$

$$\boxed{f = 12 \text{ cm}}$$

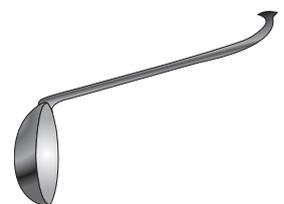
Resposta: 12 cm

49 No esquema a seguir, **E** é um espelho esférico côncavo de centro de curvatura **C**, foco principal **F** e vértice **V**. **AB** é um objeto luminoso posicionado diante da superfície refletora. Levando em conta as condições de Gauss, construa graficamente, em seu caderno, a imagem de **AB** considerando as posições 1, 2, 3, 4 e 5. Em cada caso, dê a classificação da imagem obtida.



Respostas: Posição 1: real, invertida e menor; Posição 2: real, invertida e igual; Posição 3: real, invertida e maior; Posição 4: imprópria; Posição 5: virtual, direita e maior.

50 (UFPE) A concha de aço inoxidável representada na figura pode ser usada para demonstrar propriedades dos espelhos esféricos. Uma dessas propriedades consta de uma das alternativas abaixo.



Indique:

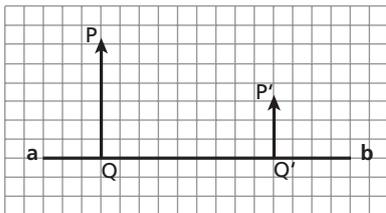
- a) Para objetos colocados à direita, num afastamento inferior a um quarto do diâmetro, as imagens são invertidas.
- b) Para objetos colocados à esquerda, num afastamento inferior a um quarto do diâmetro, as imagens são invertidas.
- c) Imagens virtuais só podem ser obtidas para objetos colocados à esquerda.
- d) Para objetos colocados à direita, num afastamento inferior a um quarto do diâmetro, as imagens são direitas.
- e) Imagens virtuais só podem ser obtidas para objetos colocados à direita.

Resolução:

- a) Falsa.
Nesse caso, a concha funciona como espelho esférico côncavo. Para distâncias menores que $\frac{1}{4}$ do diâmetro ($d < f$), as imagens são virtuais, direitas e maiores que o objeto.
- b) Falsa.
Nesse caso, a concha funciona como espelho esférico convexo. As imagens obtidas são virtuais direitas e menores que o objeto.
- c) Falsa.
Para objetos colocados à direita da concha em um afastamento inferior a $\frac{1}{4}$ do diâmetro ($d < f$), as imagens são virtuais.
- d) Verdadeira.
- e) Falsa.
Para objetos colocados à esquerda da concha, as imagens obtidas são virtuais, direitas e menores que o objeto.

Resposta: d

51 | E.R. No esquema seguinte, ab é o eixo principal de um espelho esférico gaussiano, PQ é um objeto luminoso contido em um plano frontal e P'Q' é a imagem que o espelho conjuga ao objeto considerado:



Reproduza essa figura no seu caderno e obtenha graficamente a posição e o tipo do espelho, bem como as posições de seu centro de curvatura e de seu foco principal.

Resolução:

Posição do espelho:

Inverte-se o objeto, obtendo-se seu simétrico QR em relação ao eixo principal. Liga-se R a P' (raio 1). Onde o segmento RP' intercepta o eixo principal, tem-se o vértice V do espelho.

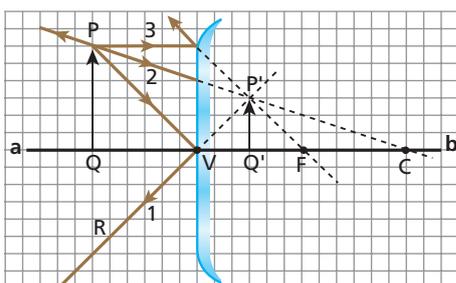
Natureza do espelho:

O espelho é convexo, pois a um objeto real está conjugando uma imagem virtual, direita e menor que o objeto.

Posição do centro de curvatura:

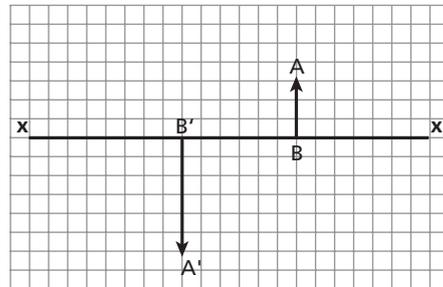
A partir de P, traça-se uma reta passando por P' (raio 2). Na intersecção dessa reta com o eixo principal, tem-se a posição do centro de curvatura.

Posição do foco principal:



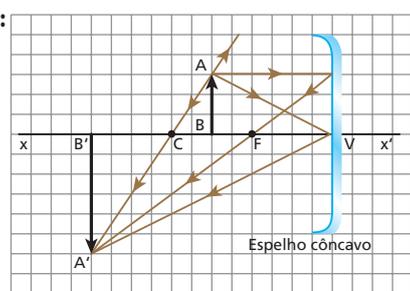
A partir de P, traça-se um segmento paralelo ao eixo principal (raio 3). Do ponto em que esse segmento toca o espelho, traça-se uma reta passando por P'. Ao cruzar o eixo principal, essa reta determina a posição do foco principal.

52 No esquema, xx' é o eixo principal de um espelho esférico gaussiano que conjuga a imagem A'B' ao objeto real AB:



Reproduza essa figura no seu caderno e obtenha graficamente a posição e o tipo do espelho, bem como as posições de seu centro de curvatura e de seu foco principal.

Resposta:



53 | E.R. Um homem situado a 2,0 m do vértice de um espelho esférico visa sua imagem direita e ampliada três vezes. Determine:

- a) a distância focal do espelho;
- b) sua natureza (côncavo ou convexo).

Resolução:

a) O aumento linear transversal vale $A = +3$ ($A > 0$, porque a imagem é direita).

Sendo a distância do objeto ao espelho $p = 2,0$ m, calculemos p' , que é a distância da imagem ao espelho:

$$A = -\frac{p'}{p}$$

$$3 = -\frac{p'}{2,0}$$

Donde:

$$p' = -6,0 \text{ m} \quad (\text{imagem virtual})$$

A distância focal f pode ser obtida pela função dos pontos conjugados (equação de Gauss):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{2,0} - \frac{1}{6,0}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{3-1}{6,0} = \frac{2}{6,0}$$

$$f = 3,0 \text{ m}$$

b) Como $f > 0$, o foco é real e o espelho é **côncavo**.

54 Considere um espelho côncavo de aumento, com distância focal $f = 1,0$ m, usado para uma pessoa fazer a barba. Calcule a distância do rosto ao espelho para que a imagem dele esteja ampliada 2 vezes.

Resolução:

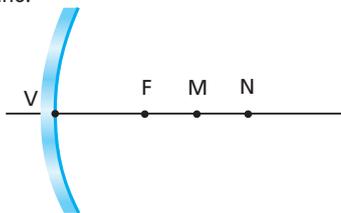
$$A = -\frac{p'}{p} \Rightarrow 2 = -\frac{p'}{p} \Rightarrow p' = -2p$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{1,0} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2p}$$

Donde: $p = 0,50 \text{ m} = 50 \text{ cm}$

Resposta: 50 cm

55 (Ufal) Considere os pontos **M** e **N**, situados sobre o eixo principal de um espelho esférico côncavo, respectivamente a 30 cm e 40 cm do vértice do espelho.



Esse espelho côncavo, que tem foco em **F** e distância focal de 20 cm, conjuga aos pontos **M** e **N**, respectivamente, as imagens **M'** e **N'**. Determine o valor absoluto da distância entre as imagens **M'** e **N'**.

Resolução:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

Ponto M: $\frac{1}{20} = \frac{1}{30} + \frac{1}{p'_M} \Rightarrow p'_M = 60 \text{ cm}$

Ponto N: $\frac{1}{20} = \frac{1}{40} + \frac{1}{p'_N} \Rightarrow p'_N = 40 \text{ cm}$

$d = p'_M - p'_N \Rightarrow d = 60 - 40 \Rightarrow d = 20 \text{ cm}$

Resposta: 20 cm

56 Diante de um espelho esférico, perpendicularmente ao seu eixo principal, é colocado um objeto luminoso a 15 cm do vértice. Deseja-se que a imagem correspondente seja projetada num anteparo e tenha quatro vezes o comprimento do objeto. Determine:

- se a imagem é real ou virtual, direita ou invertida;
- a distância do anteparo ao vértice do espelho para que a imagem seja nítida;
- a distância focal do espelho.

Resolução:

a) Se a imagem deve ser projetada em um anteparo, sua natureza é **real** e $p' > 0$.

Como $p > 0$ e $p' > 0 \Rightarrow A < 0$

e a imagem é **invertida**.

b) $A = -\frac{p'}{p} \Rightarrow -4 = -\frac{p'}{15} \Rightarrow p' = 60 \text{ cm}$

c) $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{15} + \frac{1}{60}$

Donde: $f = 12 \text{ cm}$

Respostas: a) Real e invertida; b) 60 cm; c) 12 cm

57 (Vunesp-SP) Um espelho esférico côncavo tem raio de curvatura igual a 80 cm. Um objeto retilíneo, de 2,0 cm de altura, é colocado perpendicularmente ao eixo principal do espelho, a 120 cm do vértice. Essa posição resulta em uma imagem:

- real e invertida de 1,0 cm de altura e a 60 cm do espelho.
- virtual e direita de 1,0 cm de altura e a 10 cm do espelho.
- virtual e invertida de 1,0 cm de altura e a 10 cm do espelho.
- real e direita de 40 cm de altura e a 60 cm do espelho.
- virtual e direita de 40 cm de altura e a 10 cm do espelho.

Resolução:

$f = \frac{R}{2} = \frac{80 \text{ cm}}{2} \Rightarrow f = 40 \text{ cm}$

$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{40} = \frac{1}{120} + \frac{1}{p'}$

$p' = 60 \text{ cm}$ $p' > 0 \Rightarrow$ imagem real

$A = -\frac{p'}{p} = -\frac{60 \text{ cm}}{120 \text{ cm}} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$ ($A < 0 \Rightarrow$ imagem invertida)

$\left| \frac{i}{o} \right| = |A| \Rightarrow \left| \frac{i}{2,0} \right| = \left| -\frac{1}{2} \right| \Rightarrow |i| = 1,0 \text{ cm}$

Resposta: a

58 A distância entre um objeto luminoso e sua respectiva imagem conjugada por um espelho esférico gaussiano é de 1,8 m. Sabendo que a imagem tem altura quatro vezes a do objeto e que está projetada em um anteparo, responda:

- O espelho é côncavo ou convexo?
- Qual o seu raio de curvatura?

Resolução:

a) O objeto luminoso é real e sua imagem também é real, já que está projetada em um anteparo. Assim, p e p' são positivos, o que torna f também positivo, tendo em conta que $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$. Logo, o espelho é **côncavo**.

b) $p' - p = 180 \text{ cm} \Rightarrow p' = 180 + p$ (I)

$A = -\frac{p'}{p} \Rightarrow -4 = -\frac{p'}{p} \Rightarrow p' = 4p$ (II)

Comparando (I) e (II):

$4p = 180 + p$

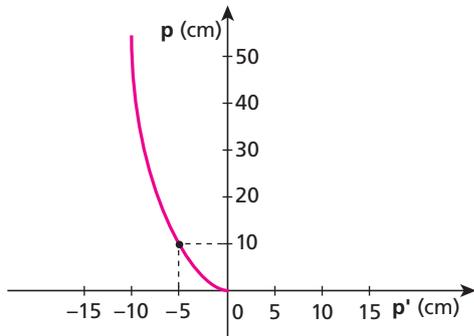
$p = 60 \text{ cm}$ e $p' = 240 \text{ cm}$

$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{60} + \frac{1}{240}$

Do qual: $R = 96 \text{ cm}$

Respostas: a) Côncavo; b) 96 cm

59 | E.R. Um objeto é colocado sobre o eixo de um espelho convexo. O gráfico seguinte representa, respectivamente, as abscissas p e p' do objeto e de sua imagem, ambas em relação ao vértice do espelho:



Qual é a distância focal desse espelho em centímetros?

Resolução:

Conforme vimos, para os espelhos esféricos gaussianos aplica-se a função dos pontos conjugados. Assim:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

Analisando o gráfico, observamos um ponto de coordenadas conhecidas. Vê-se, então, que:

para $p = 10$ cm, $p' = -5$ cm

Calculemos f , que é a distância focal do espelho:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{10} - \frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{f = -10 \text{ cm}}$$

Observe que o resultado negativo deve ser atribuído ao fato de os espelhos esféricos convexos terem focos virtuais.

60 Diante de um espelho convexo com 30 cm de raio de curvatura coloca-se um objeto luminoso a 10 cm do vértice. Determine:

- a) a abscissa focal do espelho;
- b) a distância da imagem ao espelho.

Resolução:

a) $f = -\frac{R}{2} \Rightarrow f = -\frac{30 \text{ cm}}{2} \Rightarrow \boxed{f = -15 \text{ cm}}$

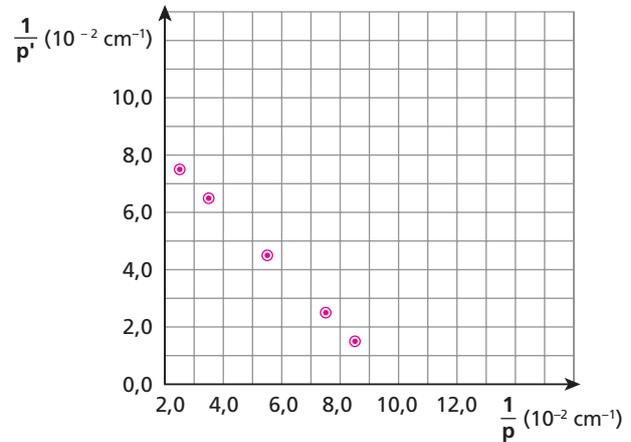
b) $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{-15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{p'}$

$p' = -6$ cm ($p' < 0 \Rightarrow$ imagem virtual)

$d = |p'| = 6,0$ cm

Respostas: a) -15 cm; b) 6,0 cm

61 Em certo experimento, mediram-se a distância p entre um objeto e a superfície refletora de um espelho esférico côncavo que obedece às condições de Gauss e a distância p' entre esse espelho e a correspondente imagem real produzida, em vários pontos. O resultado dessas medições está apresentado no gráfico abaixo:



Examinando cuidadosamente o gráfico, determine a distância focal do espelho.

Resolução:

Equação de Gauss: $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$

Do gráfico, para $\frac{1}{p} \approx 5,5 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$, temos $\frac{1}{p'} = 4,5 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$.

Substituindo os valores de $\frac{1}{p}$ e $\frac{1}{p'}$ na Equação de Gauss, vem:

$$\frac{1}{f} = 5,5 \cdot 10^{-2} + 4,5 \cdot 10^{-2} \Rightarrow f = \frac{1}{10 \cdot 10^{-2}} \text{ (cm)}$$

Donde: $\boxed{f = 10,0 \text{ cm}}$

Resposta: 10,0 cm

62 (UFBA – mod.) O quadro abaixo apresenta características de três espelhos, I, II e III:

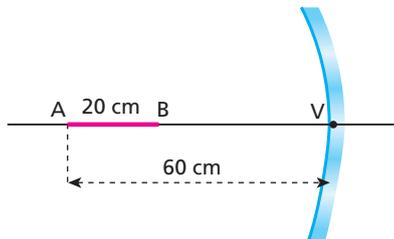
Espelho	Tipo	Abscissa focal (cm)	Abscissa da imagem (cm)	Abscissa do objeto (cm)	Aumento linear transversal	Natureza da imagem	Orientação da imagem
I		+20		+10			
II		-20	-4				
III				+10	+1		

Determine os dados que preenchem corretamente as lacunas da tabela referentes ao:

- a) espelho I;
- b) espelho II;
- c) espelho III.

Respostas: a) Côncavo; -20 cm; +2; virtual; direita; b) Convexo; +5 cm; 0,8; virtual; direita; c) Plano; infinita; -10 cm; virtual; direita

63 Uma barra AB de 20 cm de comprimento está colocada sobre o eixo principal de um espelho esférico côncavo. A extremidade B encontra-se sobre o centro de curvatura do espelho, enquanto a extremidade A encontra-se a 60 cm do espelho, como representa a figura.



Determine:

- a distância focal do espelho;
- o comprimento da imagem da barra conjugada pelo espelho.

Resolução:

$$a) f = \frac{R}{2} = \frac{40 \text{ cm}}{2} \Rightarrow \boxed{f = 20 \text{ cm}}$$

Em relação à extremidade A:

$$b) \frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{20} = \frac{1}{60} + \frac{1}{p'} \Rightarrow \boxed{p' = 30 \text{ cm}}$$

A imagem da extremidade B coincide com esse ponto. Logo:

$$A'B' = 40 \text{ cm} - 30 \text{ cm}$$

$$\boxed{A'B' = 10 \text{ cm}}$$

Respostas: a) 20 cm; b) 10 cm

64 (Mack-SP) Um objeto real se encontra diante de um espelho esférico côncavo, a 10 cm de seu vértice, sobre o eixo principal. O raio de curvatura desse espelho é de 40 cm. Se esse objeto se deslocar até o centro de curvatura do espelho, qual será a distância entre a imagem inicial e a imagem final?

Resolução:

$$f = \frac{R}{2} = \frac{40}{2} \Rightarrow \boxed{f = 20 \text{ cm}}$$

1ª posição do objeto:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'_1} \Rightarrow \frac{1}{20} = \frac{1}{10} + \frac{1}{p'_1} \Rightarrow \boxed{p'_1 = -20 \text{ cm}}$$

$(p'_1 < 0 \Rightarrow \text{imagem virtual})$

2ª posição do objeto:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p'_2} \Rightarrow \frac{1}{20} = \frac{1}{40} + \frac{1}{p'_2} \Rightarrow \boxed{p'_2 = 40 \text{ cm}}$$

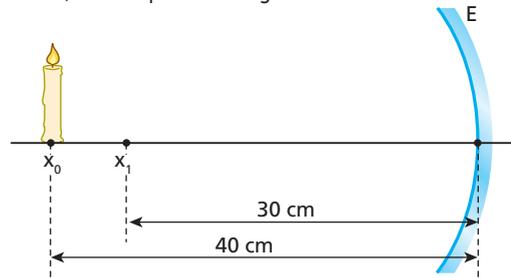
$(p'_2 > 0 \Rightarrow \text{imagem real})$

$$d = |p'_1| + |p'_2| \Rightarrow d = 20 \text{ cm} + 40 \text{ cm}$$

$$\boxed{d = 60 \text{ cm}}$$

Resposta: 60 cm

65 Num experimento de Óptica Geométrica dispuseram-se um toco de vela e um espelho côncavo gaussiano E, de distância focal igual a 20 cm, como representa a figura:



O toco de vela foi deslocado de x_0 a x_1 , com velocidade escalar de módulo 1,0 cm/s. Enquanto o toco de vela foi deslocado, qual foi o módulo da velocidade escalar média da imagem, expresso em centímetros por segundo?

Resolução:

Vela em x_0 (centro de curvatura): $p'_0 = 40 \text{ cm}$

Vela em x_1 : $\frac{1}{20} = \frac{1}{30} + \frac{1}{p'_1} \Rightarrow p'_1 = 60 \text{ cm}$

$$v_m = \frac{p'_1 - p'_0}{\Delta t} = \frac{(p'_1 - p'_0)}{p_0 - p_1} v \Rightarrow v_m = \frac{20 \cdot 1,0}{10} \text{ (cm/s)}$$

$$\boxed{v_m = 2,0 \text{ cm/s}}$$

Resposta: 2,0 cm/s

66 E.R. Um pequeno objeto linear é colocado sobre o eixo principal, em frente da superfície refletora de um espelho esférico gaussiano. Sabendo que a abscissa focal do espelho vale f e que a abscissa do objeto vale p , expresse o aumento linear transversal A em função de f e de p .

Resolução:

O aumento linear transversal é tal que:

$$A = - \frac{p'}{p} \quad (I)$$

Da qual: $p' = -A p$

(I)

Sabemos, da função dos pontos conjugados, que:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \quad (II)$$

Substituindo (I) em (II), vem:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} - \frac{1}{A p}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{A - 1}{A p}$$

$$A f - f = A p$$

$$A(f - p) = f$$

Donde:

$$\boxed{A = \frac{f}{f - p}}$$

Nota:

- Essa expressão pode ser utilizada na resolução de exercícios, constituindo um instrumento simplificador de cálculos.

67 (ITA-SP) Seja **E** um espelho côncavo cujo raio de curvatura é de 60,0 cm. Qual tipo de imagem obteremos se colocarmos um objeto real de 7,50 cm de altura, verticalmente, a 20,0 cm do vértice de **E**?

Resolução:

$$f = \frac{R}{2} = \frac{60,0 \text{ cm}}{2} \Rightarrow f = 30,0 \text{ cm}$$

$$A = -\frac{f}{f-p} = -\frac{30,0}{30,0-20,0} \Rightarrow A = +3 \quad (A > 0 \Rightarrow \text{imagem direita})$$

$$A = -\frac{p'}{p} \Rightarrow \text{Sendo } A > 0, p > 0 \text{ e tendo } p \text{ e } p' \text{ sinais opostos, tem-se } p < 0 \Rightarrow \text{imagem virtual}$$

$$A = \frac{i}{o} \Rightarrow 3 = \frac{i}{7,50} \Rightarrow i = 22,5 \text{ cm}$$

Resposta: A imagem é virtual, direita e com 22,5 cm de altura.

68 Um toco de vela é colocado frontalmente a 12 cm do vértice de um espelho esférico que obedece às condições de Gauss, obtendo-se, nesse caso, uma imagem direita e de comprimento igual a um terço do comprimento da vela. Determine:

- o tipo do espelho utilizado (côncavo ou convexo), bem como seu raio de curvatura;
- a distância da imagem ao vértice do espelho.

Resolução:

$$\text{a) Imagem direita: } A > 0 \left(A = +\frac{1}{3} \right)$$

$$A = \frac{f}{f-p} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{f}{f-12} \Rightarrow 3f = f - 12$$

$$f = -6,0 \text{ cm} \quad (f < 0 \Rightarrow \text{espelho convexo})$$

$$R = 2 |f| \Rightarrow R = 2 |-6,0| \Rightarrow R = 12 \text{ cm}$$

$$\text{b) } A = -\frac{p'}{p} \Rightarrow \frac{1}{3} = -\frac{p'}{12} \Rightarrow$$

$$\text{Donde: } p' = -4,0 \text{ cm} \quad (p' < 0 \Rightarrow \text{imagem virtual})$$

$$d = |p'| \Rightarrow d = 4,0 \text{ cm}$$

Respostas: a) Convexo; 12 cm; b) 4,0 cm

69 Em um espelho côncavo, a distância entre um objeto real e sua imagem é de 60 cm. Sabendo-se que a imagem é invertida e de comprimento igual à metade do comprimento do objeto, qual o raio de curvatura do espelho?

Resolução:

$$p - p' = 60 \Rightarrow p = 60 + p' \quad (\text{I})$$

$$A = -\frac{p'}{p} \Rightarrow -\frac{1}{2} = -\frac{p'}{p} \Rightarrow p = 2p' \quad (\text{II})$$

Comparando (I) e (II), vem:

$$2p' = 60 + p' \Rightarrow p' = 60 \text{ cm} \quad \text{e} \quad p = 120 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{120} + \frac{1}{60}$$

$$\text{Da qual: } R = 80 \text{ cm}$$

Resposta: 80 cm

70 (UFSC) A distância entre a imagem e um objeto colocado em frente a um espelho côncavo é de 16 cm. Sabendo que a imagem é direita e 3 vezes maior, determine o raio de curvatura do espelho, em centímetros.

Resolução:

$$p + |p'| = 16 \text{ cm} \Rightarrow |p'| = 16 - p \Rightarrow p' = -(16 - p) \quad (\text{I})$$

$$A = -\frac{p'}{p} \Rightarrow 3 = -\frac{p'}{p} = p' = -3p \quad (\text{II})$$

Comparando (I) e (II), vem:

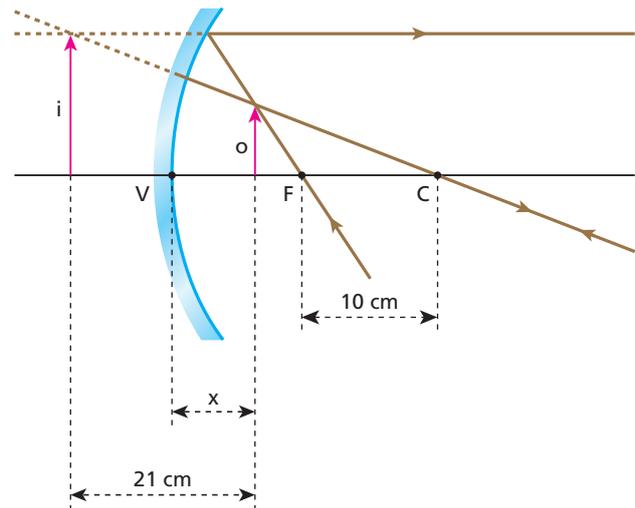
$$-3p = -(16 - p) \Rightarrow p = 4 \text{ cm} \quad \text{e} \quad p' = -12 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{4,0} - \frac{1}{12}$$

$$\text{Da qual: } R = 12 \text{ cm}$$

Resposta: 12 cm

71 (Mack-SP) Um objeto real **O** encontra-se diante de um espelho esférico côncavo, que obedece às condições de Gauss, conforme o esquema abaixo.



Sendo **C** o centro da curvatura do espelho e **F** seu foco principal, a distância **x** entre o objeto e o vértice **V** do espelho é:

- 6,0 cm.
- 9,0 cm.
- 10,5 cm.
- 11,0 cm.
- 35,0 cm.

Resolução:

Do desenho, temos:

$$p = +x \text{ cm}$$

$$p' = -(21 - x) \text{ cm}$$

$$f = +10 \text{ cm}$$

Logo, a imagem é virtual.

Aplicando a Equação de Gauss, vem:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{21-x} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{21-x-x}{x(21-x)} = \frac{1}{10}$$

$$210 - 20x = 21x - x^2 \Rightarrow x^2 - 41x + 210 = 0$$

Resolvendo a equação, temos:

$$x = \frac{41 \pm \sqrt{(-41)^2 - 4 \cdot 210}}{2} \Rightarrow x = \frac{41 \pm \sqrt{1681 - 840}}{2} \Rightarrow x = \frac{41 \pm 29}{2}$$

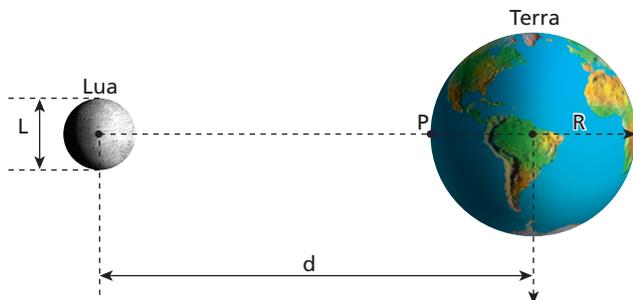
$$\text{Da qual: } x_1 = 35 \text{ cm} \quad \text{e} \quad x_2 = 6 \text{ cm}$$

$$\text{Como } x < f = 10 \text{ cm, conclui-se que: } x = 6,0 \text{ cm}$$

Resposta: a

72 Lua cheia sobre o Pacífico

Considere a situação esquematizada a seguir, fora de escala e em cores-fantasia, em que os centros da Lua e da Terra estão separados por uma distância d . Admita que o raio da Terra seja igual a R e que o Oceano Pacífico, refletindo a luz da lua cheia, comporte-se como um espelho esférico gaussiano.



Sendo L o diâmetro da Lua, determine em função de d , R e L :

- a) a distância entre a imagem da Lua e o ponto P ;
- b) o diâmetro da imagem da Lua.

Resolução:

a) Considerando $p = d - R$ e $f = -\frac{R}{2}$, calculamos p' pela Equação de Gauss:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{-\frac{R}{2}} = \frac{1}{d-R} + \frac{1}{p'}$$

$$\frac{1}{p'} = -\frac{2}{R} - \frac{1}{d-R} \Rightarrow \frac{1}{p'} = \frac{-2(d-R) - R}{R(d-R)}$$

Da qual: $p' = \frac{R(d-R)}{R-2d}$

Observe que, como a imagem é virtual, p' é um número negativo. Sendo x a distância entre a imagem da Lua e o ponto P , temos:

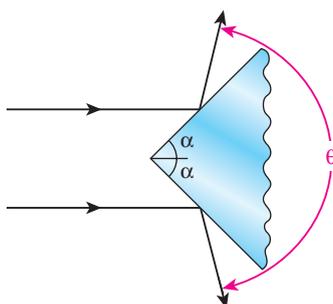
$$x = -p' \Rightarrow x = \frac{R(d-R)}{2d-R}$$

b) $\frac{i}{o} = -\frac{p'}{p} \Rightarrow \frac{i}{L} = -\frac{\frac{R(d-R)}{R-2d}}{d-R}$

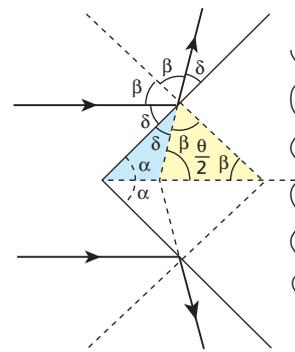
Donde: $i = \frac{LR}{2d-R}$

Respostas: a) $\frac{R(d-R)}{2d-R}$; b) $\frac{LR}{2d-R}$

73 (UFPE – mod.) A figura representa um feixe paralelo de luz incidente em um prisma que tem suas superfícies externas refletoras. Parte do feixe é refletida por uma face e parte por outra. Se o ângulo entre cada face do prisma e a direção do feixe é α , determine o ângulo θ entre as direções dos feixes refletidos.



Resolução:



$2\beta + 2\delta = 180^\circ \Rightarrow \beta + \delta = 90^\circ$ (I)

Triângulo destacado à direita: $2\beta + \frac{\theta}{2} = 180^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ - \frac{\theta}{4}$ (II)

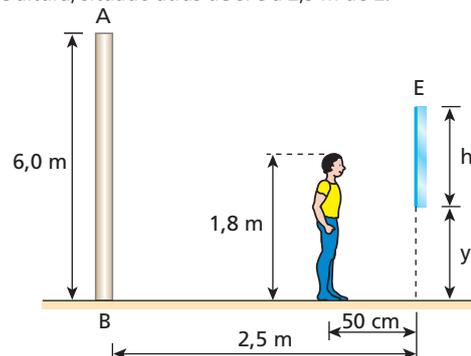
(II) em (I): $90^\circ - \frac{\theta}{4} + \delta = 90^\circ \Rightarrow \delta = \frac{\theta}{4}$ (III)

Triângulo destacado à esquerda: $\alpha + \delta = \frac{\theta}{2}$ (IV)

(III) em (IV): $\alpha + \frac{\theta}{4} = \frac{\theta}{2} \Rightarrow \theta = 4\alpha$

Resposta: $\theta = 4\alpha$

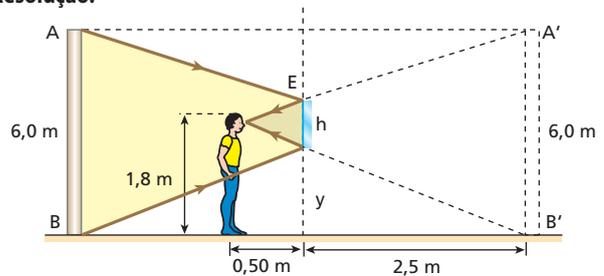
74 Uma pessoa cujos olhos se encontram a 1,8 m do chão está em repouso diante de um espelho plano vertical E , a 50 cm dele. A pessoa visualiza, por reflexão em E , a imagem de um poste AB , de 6,0 m de altura, situado atrás de si e a 2,5 m de E .



Determine:

- a) a mínima dimensão vertical h que deve ter o espelho para que a pessoa possa ver inteiramente a imagem do poste.
- b) a distância y da borda inferior do espelho ao chão nas condições do item anterior.

Resolução:

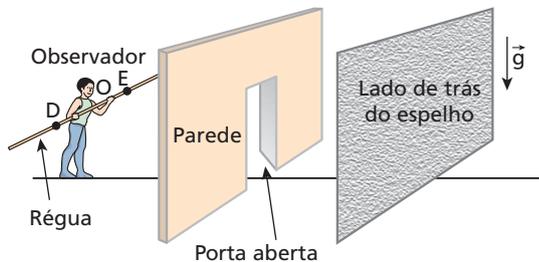


a) $\frac{h}{6,0} = \frac{0,50}{2,5 + 0,5} \Rightarrow h = 1,0 \text{ m}$

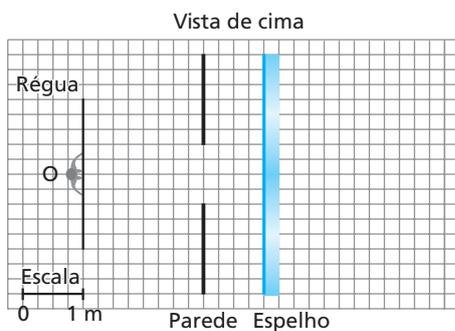
b) $\frac{y}{2,5} = \frac{1,8}{2,5 + 0,50} \Rightarrow y = 1,5 \text{ m}$

Respostas: a) $h = 1,0 \text{ m}$; b) $y = 1,5 \text{ m}$

75 (Fuvest-SP – mod.) Um observador **O** olha-se em um espelho plano vertical pela abertura de uma porta com 1 m de largura, paralela ao espelho, conforme a figura e o esquema a seguir. Segurando uma régua longa, ele a mantém na posição horizontal, paralela ao espelho e na altura dos ombros, para avaliar os limites da região que consegue enxergar através do espelho (limite **D**, à sua direita, e limite **E**, à sua esquerda).



a) Copie a figura e trace os raios que, partindo dos limites **D** e **E** da região visível da régua, atingem os olhos do observador **O**. Construa a solução, utilizando linhas cheias para indicar esses raios e linhas tracejadas para prolongamentos de raios ou outras linhas auxiliares. Indique, com uma flecha, o sentido do percurso da luz.

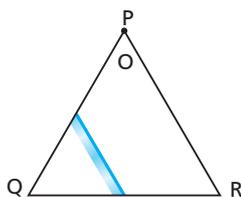


b) Copie o esquema e identifique **D** e **E**, estimando, em metros, a distância **L** entre esses dois pontos da régua.

Respostas: a)

b) $L = 1,5 \text{ m}$

76 (Vunesp-SP) Um observador **O** encontra-se no vértice **P** de uma sala, cuja planta é um triângulo equilátero de lado igual a 6,0 m. Em um dos cantos da sala, existe um espelho vertical de 3,0 m de largura ligando os pontos médios das paredes **PQ** e **QR**.

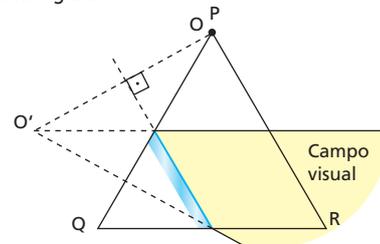


Nessas condições, olhando através do espelho, o observador vê (no plano horizontal que passa pelos seus olhos):

- metade de cada parede da sala.
- um terço de **PR** e metade de **QR**.
- um terço de **PR** e um terço de **PQ**.
- metade de **QR** e metade de **PR**.
- PR** inteira e metade de **QR**.

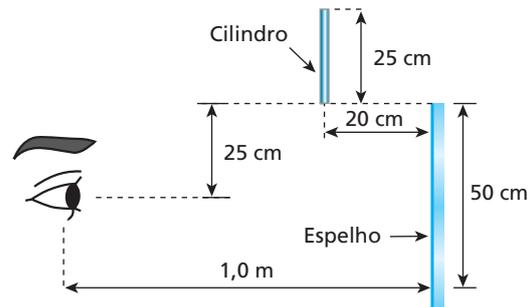
Resolução:

O campo visual do espelho para a posição do observador (ponto **O**) está esboçado na figura:



Resposta: d

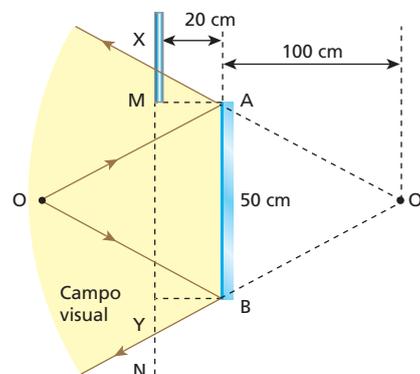
77 (Faap-SP) Um cilindro de 25 cm de altura e de diâmetro desprezível foi abandonado de uma posição tal que sua base inferior estava alinhada com a extremidade superior de um espelho plano de 50 cm de altura e a 20 cm deste. Durante sua queda, ele é visto, assim como sua imagem, por um observador, que se encontra a 1 m do espelho e a meia altura deste (ver figura).



Calcule por quanto tempo o observador ainda vê a imagem do cilindro (total ou parcial), que permanece vertical durante a queda. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Resolução:

No esquema seguinte, delimitamos o campo visual do espelho plano em relação ao observador **O**:



Da semelhança de triângulos $O'AB$ e $O'XY$, obtemos: $XY = 60 \text{ cm}$. Devido à simetria, concluímos que: $XM = 5,0 \text{ cm} \Rightarrow MY = 55 \text{ cm}$, mas $YN = 25 \text{ cm} \Rightarrow MN = 80 \text{ cm}$.

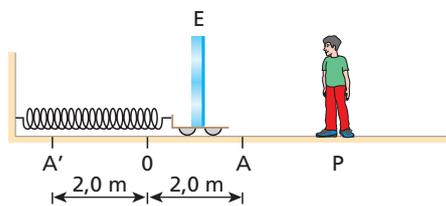
O observador contempla a imagem do cilindro desde sua posição inicial (extremidade inferior em **M**) até sua saída do campo visual do espelho (extremidade superior em **Y**).

O intervalo de tempo pedido é calculado por:

$$\Delta s = v_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2 \Rightarrow MN = \frac{g}{2} t^2 \Rightarrow 0,80 = \frac{10}{2} t^2 \Rightarrow \boxed{t = 0,40 \text{ s}}$$

Resposta: 0,40 s

78 Na situação esquematizada, um espelho plano vertical **E**, instalado sobre um carrinho, realiza movimento harmônico simples (**MHS**) entre os pontos **A** e **A'** do solo plano e horizontal, com sua superfície refletora voltada para um garoto em repouso na posição **P**. A mola que está ligado o carrinho tem massa desprezível e sua constante elástica é $K = 180 \text{ N/m}$.



Sabendo que a massa do conjunto carrinho-espelho vale $m = 20 \text{ kg}$ e que $\pi \approx 3$, aponte a alternativa em que estão relacionados corretamente o período **T** de oscilação do sistema e a intensidade máxima **v** da velocidade da imagem do garoto, dada por **E**, em relação ao solo:

- a) $T = 1,0 \text{ s}; v = 6,0 \text{ m/s};$
- b) $T = 2,0 \text{ s}; v = 12 \text{ m/s};$
- c) $T = 2,0 \text{ s}; v = 6,0 \text{ m/s};$
- d) $T = 1,0 \text{ s}; v = 12 \text{ m/s};$
- e) $T = 1,5 \text{ s}; v = 9,0 \text{ m/s}.$

Resolução:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{\frac{20}{180}} \text{ (s)} \Rightarrow \boxed{T = 2,0 \text{ s}}$$

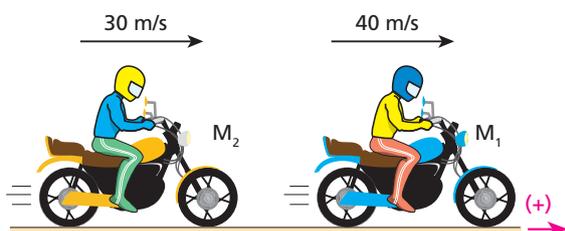
Para o espelho: $v_{\text{máx}_E} = A\omega = A \frac{2\pi}{T} \Rightarrow v_{\text{máx}_E} = 2,0 \cdot \frac{2 \cdot 3}{2,0} \text{ (m/s)}$

Donde: $\boxed{v_{\text{máx}_E} = 6,0 \text{ m/s}}$

Para a imagem: $v_{\text{máx}_i} = 2v_{\text{máx}_E} = 2 \cdot 6,0 \text{ (m/s)} \Rightarrow \boxed{v_{\text{máx}_i} = 12 \text{ m/s}}$

Resposta: b

79 A ilustração a seguir representa as motos M_1 e M_2 em movimento uniforme num trecho retilíneo de uma estrada. Suas velocidades escalares, dadas de acordo com a orientação da trajetória, estão indicadas na figura:

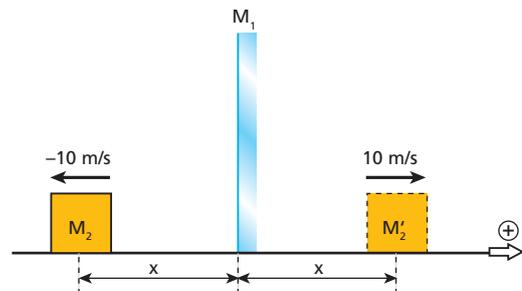


Sabendo que a moto M_1 é equipada com um espelho retrovisor plano, calcule para a imagem de M_2 conjugada pelo referido espelho:

- a) a velocidade escalar em relação ao espelho;
- b) a velocidade escalar em relação a M_2 ;
- c) a velocidade escalar em relação à estrada.

Resolução:

a) Considerando M_1 "parada", teremos M_2 em movimento de afastamento com velocidade escalar relativa de -10 m/s .

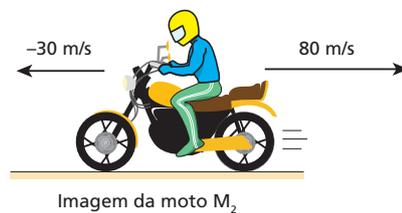


Devido à simetria, deveremos ter: $\boxed{v_{i,e} = 10 \text{ m/s}}$

b) A velocidade escalar relativa v_{i,M_2} é dada por:

$$v_{i,M_2} = 10 \text{ m/s} + 10 \text{ m/s} \Rightarrow \boxed{v_{i,M_2} = 20 \text{ m/s}}$$

c) Devido exclusivamente ao movimento de M_2 , a imagem de M_2 tem, em relação à Terra, velocidade escalar de -30 m/s . Devido exclusivamente ao movimento do espelho, a imagem de M_2 tem, em relação à Terra, velocidade de 80 m/s .

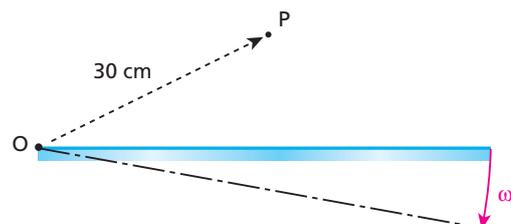


Fazendo a superposição dos efeitos, isto é, dos movimentos parciais da imagem da moto M_2 , teremos, para $v_{i,T}$, o valor seguinte:

$$v_{i,T} = -30 \text{ m/s} + 80 \text{ m/s} \Rightarrow \boxed{v_{i,T} = 50 \text{ m/s}}$$

Respostas: a) 10 m/s; b) 20 m/s; c) 50 m/s

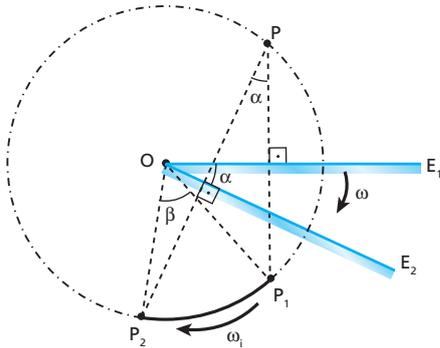
80 Um objeto pontual **P** está diante da superfície refletora de um espelho plano, conforme a figura:



Se o espelho girar em torno do eixo **O** (perpendicular à página) com velocidade escalar angular $\omega = 5,0 \text{ rad/s}$, qual será a velocidade escalar linear da imagem de **P**?

Resolução:

A situação proposta pode ser esquematizada conforme segue:

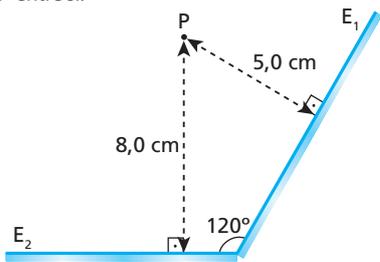


$$\beta = 2\alpha \Rightarrow \omega_i = 2\omega = 2 \cdot 5,0 \text{ rad/s} \Rightarrow \omega_i = 10 \text{ rad/s}$$

$$v_i = \omega_i R = 10 \cdot 0,30 \text{ (m/s)} \Rightarrow v_i = 3,0 \text{ m/s}$$

Resposta: 3,0 m/s

81 Considere dois espelhos planos E_1 e E_2 , associados conforme representa a figura a seguir, com suas superfícies refletoras formando um ângulo de 120° entre si.

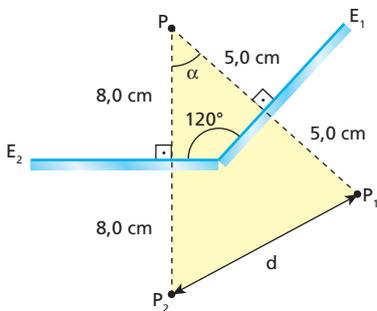


Se um objeto luminoso P for fixado diante dos dois espelhos, a 5,0 cm de E_1 e a 8,0 cm de E_2 , conforme está ilustrado, pode-se afirmar que a distância entre as duas imagens de P , obtidas por simples reflexão da luz nos espelhos, será igual a:

- a) 12,0 cm;
- b) 14,0 cm;
- c) 16,0 cm;
- d) 18,0 cm;
- e) 26,0 cm.

Resolução:

O ângulo α no triângulo destacado vale 60° . Logo, aplicando a Lei dos cossenos, calculamos a distância d .



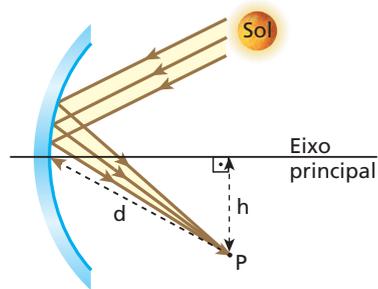
$$d^2 = (10,0)^2 + (16,0)^2 - 2 \cdot 10,0 \cdot 16,0 \cdot \cos 60^\circ$$

Da qual: $d = 14,0 \text{ m}$

Resposta: b

82 No século III a.C., Arquimedes teria liderado guerreiros da Sicília – na época pertencente à Magna Grécia – na defesa da cidade de Siracusa, vítima constante de ataques marítimos de frotas romanas. Conta-se que ele instalava na região costeira da ilha espelhos ustórios (ou incendiários), que consistiam em enormes calotas esféricas, polidas na parte interna (côncava), que “concentravam” os raios solares, produzindo fogo nas galeras inimigas.

O esquema a seguir representa um desses espelhos, em operação de acordo com as condições de Gauss, e a trajetória seguida pela luz até um ponto fatal P , de alta concentração energética.



Supondo-se conhecidos os comprimentos d e h , o raio de curvatura do espelho fica determinado por:

- a) $(d^2 - h^2)^{\frac{1}{2}}$;
- b) $2(d^2 - h^2)^{\frac{1}{2}}$;
- c) $(d^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}$;
- d) $2(d^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}$;
- e) $(h^2 - d^2)^{\frac{1}{2}}$.

Resolução:

O ponto P é um foco secundário do espelho. A distância focal f fica, então, determinada pelo Teorema de Pitágoras.

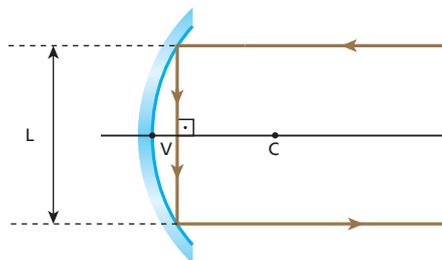
$$d^2 = f^2 + h^2 \Rightarrow f = (d^2 - h^2)^{\frac{1}{2}}$$

Mas $R = 2f$. Logo:

$$R = 2(d^2 - h^2)^{\frac{1}{2}}$$

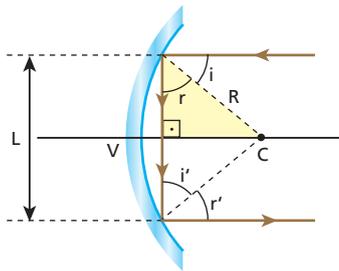
Resposta: b

83 A figura representa um espelho esférico côncavo de centro de curvatura C e vértice V . Um raio de luz, ao incidir paralelamente ao eixo CV , reflete-se duas vezes, deixando o espelho também paralelamente ao eixo CV .



Sabendo que o raio de curvatura do espelho vale $\sqrt{2} \text{ m}$, calcule o comprimento L .

Resolução:



$$r = i = 45^\circ; r' = i' = 45^\circ$$

$$\cos 45^\circ = \frac{L}{R} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{L}{R} \Rightarrow L = 2,0 \text{ m}$$

Resposta: 2,0 m

84 (Cesgranrio-RJ) A distância mínima entre seu olho e um objeto, para que você o veja nitidamente, é de 24 cm. Tendo um espelho côncavo de distância focal igual a 16 cm, e querendo se olhar nele, a que distância mínima do espelho deverá ficar seu olho para que você o veja ampliado?

Resolução:

$$p + |p'| = 24 \text{ cm} \Rightarrow |p'| = 24 - p \Rightarrow p' = -(24 - p)$$

Equação de Gauss

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{16} = \frac{1}{p} - \frac{1}{24 - p}$$

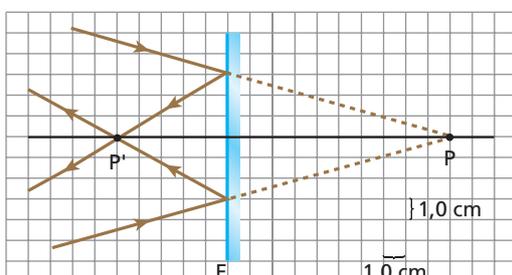
$$\frac{1}{16} = \frac{24 - p - p}{p(24 - p)} \Rightarrow 24p - p^2 = 384 - 32p$$

$$p^2 - 56p + 384 = 0 \begin{cases} p_1 = 8,0 \text{ cm} \\ p_2 = 48 \text{ cm} \end{cases}$$

$$p_{\min} = 8,0 \text{ cm}$$

Resposta: 8,0 cm

85 No esquema seguinte, **E** representa um espelho esférico que obedece às condições de aproximação de Gauss:



Considerando os elementos do esquema, podemos afirmar que:

- a) o espelho é côncavo e sua distância focal tem módulo 10 cm;
- b) o espelho é côncavo e sua distância focal tem módulo 7,5 cm;
- c) o espelho é côncavo e sua distância focal tem módulo 5,0 cm;
- d) o espelho é convexo e sua distância focal tem módulo 10 cm;
- e) o espelho é convexo e sua distância focal tem módulo 5,0 cm.

Resolução:

Da figura: $p = -10 \text{ cm}$ e $p' = 5,0 \text{ cm}$

Equação de Gauss

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{f} = -\frac{1}{10} + \frac{1}{5,0}$$

Da qual: $f = 10 \text{ cm}$ ($f > 0 \Rightarrow$ espelho côncavo)

Resposta: a

86 Um objeto linear é colocado diante da superfície refletora de um espelho esférico côncavo, de raio de curvatura igual a 120 cm e que obedece às condições de Gauss. Sabendo que a imagem tem tamanho quatro vezes o tamanho do objeto, calcule a distância do objeto ao espelho.

Resolução:

1ª solução:

Objeto situado entre o foco e o vértice.

$$A = \frac{f}{f - p} \Rightarrow +4 = \frac{60}{60 - p} \Rightarrow p = 45 \text{ cm}$$

2ª solução:

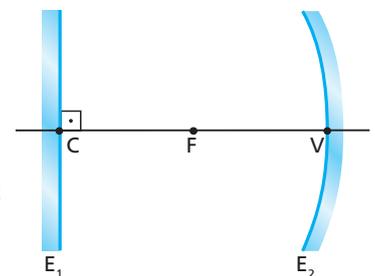
Objeto situado entre o centro de curvatura e o foco.

$$A = \frac{f}{f - p} \Rightarrow -4 = \frac{60}{60 - p} \Rightarrow p = 75 \text{ cm}$$

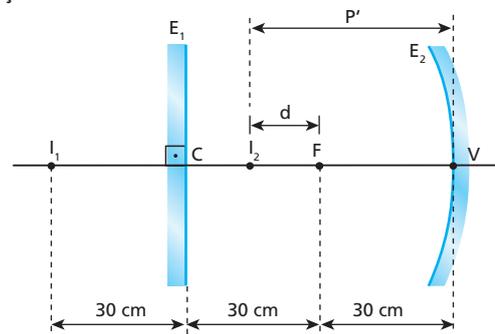
Resposta: 45 cm ou 75 cm

87 No esquema a seguir, E_1 é um espelho plano e E_2 é um espelho esférico côncavo de raio de curvatura $R = 60 \text{ cm}$.

C, F e V são, respectivamente, em relação a E_2 , o centro de curvatura, o foco e o vértice. Em **F**, é colocada uma fonte pontual de luz. Determine a distância da fonte à sua imagem, considerando que a luz sofre dupla reflexão, primeiro em E_1 e posteriormente em E_2 .



Resolução:



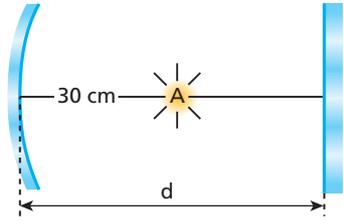
$$(I) \frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

$$\frac{1}{30} = \frac{1}{90} + \frac{1}{p'} \Rightarrow p' = 45 \text{ cm}$$

$$(II) d = p' - f \Rightarrow d = 45 - 30 \text{ (cm)} \Rightarrow d = 15 \text{ cm}$$

Resposta: 15 cm

88 (ITA-SP) Um espelho plano está colocado em frente de um espelho côncavo, perpendicularmente ao eixo principal. Uma fonte luminosa pontual **A**, colocada sobre o eixo principal entre os dois espelhos, emite raios que se refletem sucessivamente nos dois espelhos e formam, sobre a própria fonte **A**, uma imagem real desta. O raio de curvatura do espelho é 40 cm e a distância do centro da fonte **A** até o vértice do espelho esférico é de 30 cm. A distância **d** do espelho plano até o vértice do espelho côncavo é, então:



- a) 20 cm. c) 40 cm. e) 50 cm.
 b) 30 cm. d) 45 cm.

Resolução:

Determinemos, inicialmente, a posição da imagem conjugada pelo espelho côncavo em relação a este espelho.

Equação de Gauss: $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$

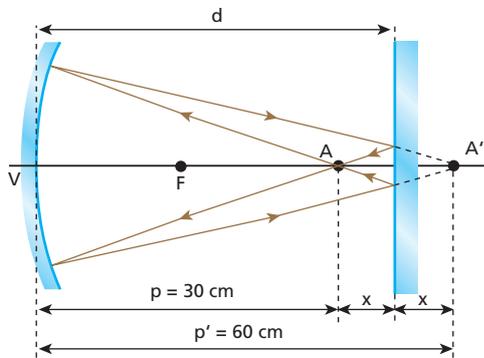
Seja $f = \frac{R}{2} = \frac{40}{2} \text{ cm} = 20 \text{ cm}$ e $p = 30 \text{ cm}$, calculemos p' :

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{1}{p'} = \frac{1}{20} - \frac{1}{30} \Rightarrow \frac{1}{p'} = \frac{3-2}{60}$$

Da qual: $p' = 60 \text{ cm}$

Para que a imagem final, formada sobre o objeto **A**, seja de natureza real, a imagem fornecida pelo espelho côncavo deve comportar-se como objeto virtual em relação ao espelho plano.

A trajetória dos raios de luz pode ser observada no esquema a seguir:



Lembrando que no espelho plano a imagem é simétrica do objeto em relação à superfície refletora, temos:

$$2x = p' - p \Rightarrow 2x = 60 - 30 \Rightarrow x = 15 \text{ cm}$$

A distância **d** pedida fica, então, determinada por:

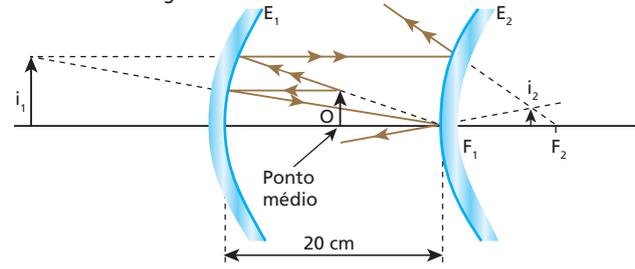
$$d = p + x \Rightarrow d = 30 + 15 \text{ (cm)} \Rightarrow x = 45 \text{ cm}$$

Resposta: d

89 Um espelho convexo cuja distância focal tem módulo igual a 10 cm está situado a 20 cm de um espelho côncavo de distância focal 20 cm. Os espelhos estão montados coaxialmente e as superfícies refletoras se defrontam. Coloca-se um objeto luminoso no ponto médio do segmento que une os vértices dos dois espelhos. Localize a imagem fornecida pelo espelho convexo ao receber os raios luminosos que partem do objeto e são refletidos pelo espelho côncavo.

Resolução:

A imagem fornecida pelo espelho convexo pode ser obtida graficamente como a seguir:



Equação de Gauss: $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow \frac{1}{10} + \frac{1}{p_1'} = \frac{1}{20} \Rightarrow p_1' = -20 \text{ cm}$

A imagem virtual i_1 produzida por E_1 comporta-se como objeto real em relação ao espelho convexo E_2 .

Equação de Gauss: $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{(20+20)} + \frac{1}{p_2'} = \frac{1}{-10}$

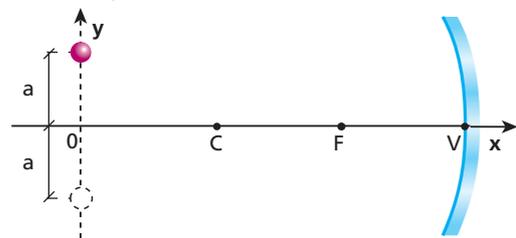
Da qual: $p_2' = -8,0 \text{ cm}$

Resposta: A imagem é de natureza virtual e está a 8,0 cm do vértice do espelho convexo.

90 Uma partícula pontual realiza, na vertical, um movimento harmônico simples (MHS) cuja elongação **y** é dada em função do tempo **t** por:

$$y = a \cos(\omega t)$$

O plano de oscilação da partícula é perpendicular ao eixo principal (eixo **Ox**) de um espelho esférico côncavo gaussiano e está a uma distância do vértice igual a três vezes a distância focal do espelho.



Determine:

- a frequência angular de oscilação da imagem da partícula;
- a amplitude de oscilação da imagem;
- a diferença de fase $\Delta\phi$ entre o movimento de oscilação da partícula e o da sua imagem.

Resolução:

a) Enquanto a partícula realiza uma oscilação completa, o mesmo ocorre com sua imagem (períodos iguais). Logo:

$$\omega_i = \omega$$

Observar que $\omega = \frac{2\pi}{T}$

b) $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{3f} + \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{3f} \Rightarrow p' = \frac{3}{2}f$

$$\frac{i_o}{o} = -\frac{p'}{p} \Rightarrow \frac{i}{a} = -\frac{\frac{3}{2}f}{3f} \Rightarrow i = -\frac{a}{2}$$

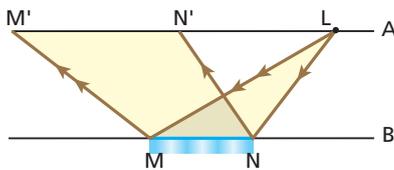
Donde: $a_i = |i| = \frac{a}{2}$

c) A partícula e sua imagem oscilam em **oposição de fase**, o que fica evidenciado pela oposição dos sinais de \mathbf{i} e \mathbf{o} . Assim, a diferença de fase pedida é:

$$\Delta\phi = \pi \text{ rad}$$

Respostas: a) ω ; b) $\frac{a}{2}$; c) $\Delta\phi = \pi \text{ rad}$

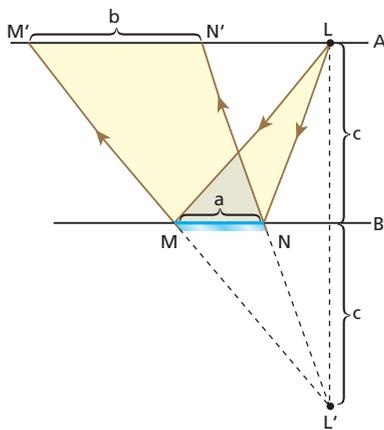
91 Considere um corredor delimitado por duas paredes planas, verticais e paralelas entre si. Numa das paredes (**A**) está incrustada uma lâmpada puntiforme (**L**) acesa. Na outra parede (**B**) está fixado um espelho plano (MN), que reflete luz proveniente de **L**, iluminando a região $M'N'$ da parede **A**.



Admitindo-se que a parede **A** passe a se aproximar da parede **B** com velocidade constante de módulo V , permanecendo, porém, paralela a **B**, pode-se afirmar que a velocidade de M' em relação a N' terá:

- a) módulo nulo;
- b) módulo $V/2$;
- c) módulo V ;
- d) módulo $2V$;
- e) um outro valor.

Resolução:



$$\frac{b}{a} = \frac{2c}{c}$$

Logo: $b = 2a$

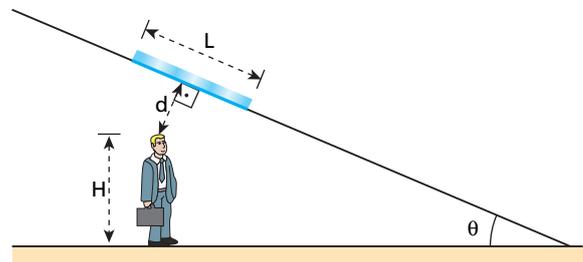
A distância b entre M' e N' permanece constante, independentemente da distância c entre as paredes.

Observe que b só depende do comprimento a do espelho. Assim, a velocidade de M' em relação a N' terá módulo nulo.

Observe também que a região iluminada na parede **A** não se desloca em relação a essa parede à medida que ela se aproxima da parede **B**.

Resposta: a

92 (Olimpíada Brasileira de Física – mod.) A figura a seguir ilustra uma pessoa de altura H posicionada diante de um espelho plano fixado em uma parede inclinada de um ângulo θ em relação ao solo.

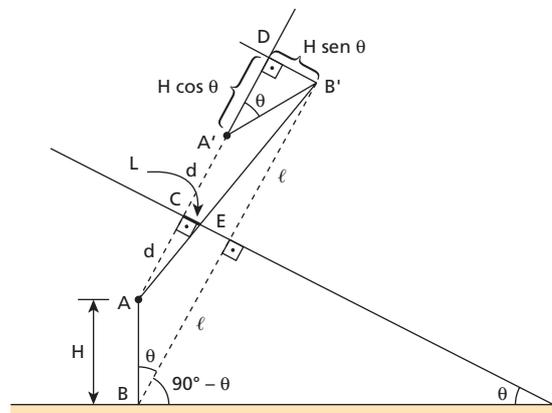


Supondo-se conhecida a distância d entre o topo da cabeça da pessoa e o espelho e desprezando-se a distância entre seus olhos e o topo de sua cabeça, pede-se determinar:

- a) o comprimento mínimo L do espelho para que a pessoa possa se ver de corpo inteiro;
- b) o valor de L para o caso particular em que $\theta = 90^\circ$;
- c) a distância Y entre a borda inferior do espelho e o solo na situação do item **b**.

Resolução:

- a) Na figura a seguir, a pessoa está se vendo de corpo inteiro no espelho plano considerado. É importante notar a simetria entre o objeto e sua imagem em relação ao espelho.



Os triângulos ACE e ADB' são semelhantes. Logo:

$$\frac{L}{d} = \frac{H \text{ sen } \theta}{2d + H \text{ cos } \theta} \Rightarrow L = \frac{d H \text{ sen } \theta}{2d + H \text{ cos } \theta}$$

b) Fazendo-se:

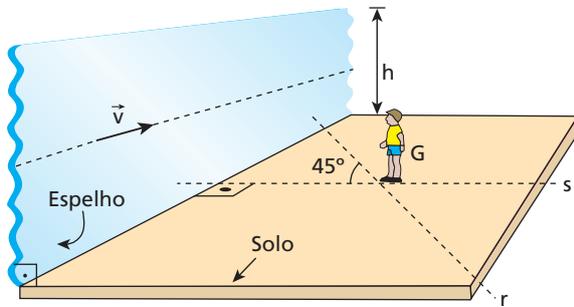
$\theta = 90^\circ$ (parede perpendicular ao solo), vem:

$$L = \frac{d H \text{ sen } 90^\circ}{2d + H \text{ cos } 90^\circ} \Rightarrow L = \frac{d H}{2d}$$

$$\text{Portanto: } L = \frac{H}{2}$$

Nota: Nesse caso particular, L independe de d .

95 Considere um espelho plano retangular, disposto perpendicularmente ao solo, considerado plano e horizontal. O espelho tem altura h desprezível em comparação com o comprimento de sua base. Admita que esse espelho esteja em movimento na direção do seu eixo longitudinal, com velocidade \vec{v} de módulo 1,0 m/s, conforme ilustra o esquema a seguir, que também mostra um garoto G que pode caminhar sobre o solo.



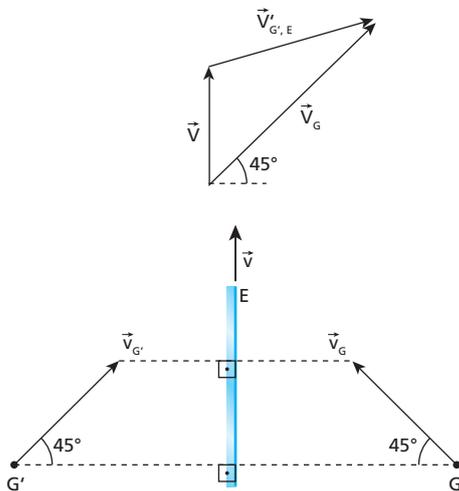
- Supondo G em repouso em relação ao solo, qual o módulo da velocidade da imagem de G em relação ao espelho?
- Supondo que G se aproxime do espelho, percorrendo a reta r coplanar à reta s com velocidade de módulo $4,0\sqrt{2}$ m/s em relação ao solo, qual o módulo da velocidade da imagem de G em relação ao espelho?

Resolução:

- Com G em repouso em relação ao solo, sua imagem G' também se apresenta em repouso em relação ao solo. Como o espelho tem velocidade \vec{v} em relação ao solo, G' tem velocidade $\vec{v}_{G'} = -\vec{v}$ em relação ao espelho (propriedade simétrica). Logo:

$$|\vec{v}_{G'}| = |\vec{v}| = 1,0 \text{ m/s}$$

-



A velocidade da imagem G' em relação ao espelho E é $\vec{v}_{G',E}$, dada pela seguinte expressão vetorial:

$$\vec{v}_{G',E} = \vec{v}_G - \vec{v}$$

O módulo de $\vec{v}_{G',E}$ é obtido aplicando-se a Lei dos Cossenos.

$$|\vec{v}_{G',E}|^2 = (4,0\sqrt{2})^2 + (1,0)^2 - 2 \cdot 4,0\sqrt{2} \cdot 1,0 \cos 45^\circ$$

Da qual: $|\vec{v}_{G',E}| = 5,0 \text{ m/s}$

Respostas: a) 1,0 m/s; b) 5,0 m/s

96 Dois espelhos E_1 e E_2 são alinhados de modo que tenham eixo óptico comum e a permaneçam com suas faces refletoras voltadas entre si, separadas por 32 cm. Um objeto pontual é colocado sobre o eixo do sistema, a meia distância entre os dois espelhos. Observa-se, então, que a imagem final desse objeto, após múltiplas reflexões da luz, situa-se também sempre a meia distância entre os dois espelhos. O espelho E_1 é esférico côncavo e tem raio de curvatura igual a 24 cm.

- Determine a posição da imagem do objeto formada apenas pelo espelho E_1 .
- Identifique o tipo do espelho E_2 .

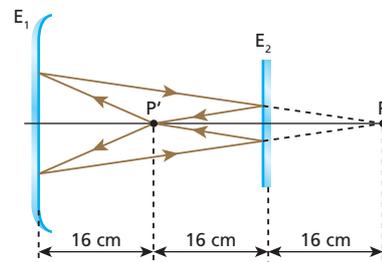
Resolução:

Equação de Gauss:

$$a) \frac{1}{f_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'_1} \Rightarrow \frac{1}{24} = \frac{1}{16} - \frac{1}{p'_1}$$

$$\frac{1}{p'_1} = \frac{1}{12} - \frac{1}{16} \Rightarrow p'_1 = 48 \text{ cm}$$

($p'_1 > 0 \Rightarrow$ imagem real)



Observe que a imagem real fornecida por E_1 funciona como objeto virtual para E_2 .

- Observando no esquema a **simetria** entre o objeto P e a correspondente imagem P' , concluímos que E_2 é um espelho plano.

Respostas: a) 48 cm de E_1 ; b) E_2 é um espelho plano

97 Um automóvel cujo velocímetro não funciona está se deslocando em movimento uniforme ao longo de uma avenida retilínea em que a velocidade máxima permitida é de 50 km/h. Esse veículo possui um espelho retrovisor esférico (convexo) de raio de curvatura igual a 2,0 m. Ao passar diante de uma estaca vertical de altura 1,8 m, o motorista põe em marcha um cronômetro, verificando que transcorreram 14 s desde o instante em que foi acionado o instrumento até o instante em que a altura da imagem da estaca dada pelo espelho é de 10 mm. Considerando válidas as condições de Gauss no funcionamento do espelho retrovisor, determine se o automóvel trafega ou não dentro do limite de velocidade da avenida.

Resolução:

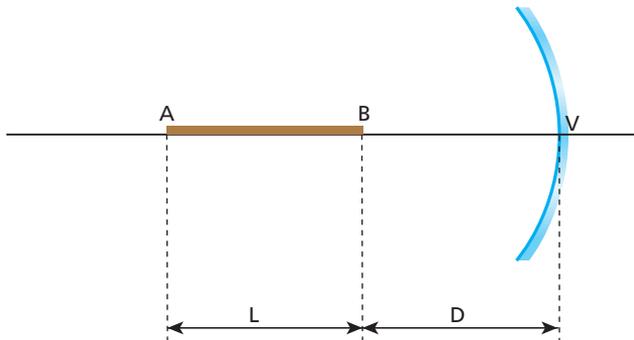
$$(I) A = \frac{i}{o} = \frac{10 \text{ mm}}{1800 \text{ mm}} \Rightarrow A = \frac{1}{180} \quad (A > 0 \Rightarrow \text{imagem direita})$$

$$(II) A = \frac{f}{f-p} \Rightarrow \frac{1}{180} = \frac{-1,0}{-1,0-p} \Rightarrow -1,0-p = -180 \Rightarrow p = 179 \text{ m}$$

$$(III) v = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{179 \text{ m}}{14 \text{ s}} = \frac{179}{14} \cdot 3,6 \text{ km/h} \Rightarrow v \approx 46 \text{ km/h}$$

Resposta: O automóvel trafega dentro do limite de velocidade da avenida, já que sua velocidade é de 46 km/h, aproximadamente.

98 (Olimpíada Brasileira de Física – mod.) Uma haste retilínea AB de comprimento L é colocada diante da superfície refletora de um espelho esférico côncavo E , que obedece às condições de Gauss, sobre o eixo principal do espelho, conforme representa a figura.



A distância focal do espelho é igual a f e a extremidade B da haste encontra-se a uma distância D ($D > f$) do vértice V .

- a) Calcule em função de f , L e D o comprimento C da imagem da haste produzida por E .
- b) Determine a relação entre L e f para o caso particular de a imagem de B se formar sobre esse mesmo ponto, com $C = \frac{L}{2}$.

Resolução:

a) Equação de Gauss: $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$

Posição da imagem B :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{D} + \frac{1}{p'_B} \Rightarrow \frac{1}{p'_B} = \frac{1}{f} - \frac{1}{D} \Rightarrow \frac{1}{p'_B} = \frac{D-f}{Df} \Rightarrow p'_B = \frac{Df}{D-f}$$

Posição da imagem A :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{D+L} + \frac{1}{p'_A} \Rightarrow \frac{1}{p'_A} = \frac{1}{f} - \frac{1}{D+L} \Rightarrow \frac{1}{p'_A} = \frac{D+L-f}{f(D+L)}$$

Da qual: $p'_A = \frac{f(D+L)}{D+L-f}$

Cálculo de C :

$$C = p'_B - p'_A \Rightarrow C = \frac{Df}{D-f} - \frac{f(D+L)}{D+L-f}$$

$$C = \frac{Df(D+L-f) - (Df+Lf)(D-f)}{(D-f)(D+L-f)}$$

$$C = \frac{D^2f + DfL - Df^2 - (D^2f - Df^2 + DfL - Lf^2)}{(D-f)(D+L-f)}$$

Donde: $C = \frac{Lf^2}{(D-f)(D+L-f)}$

- b) Se $p'_B = D$ (a imagem do ponto B forma-se sobre esse mesmo ponto), vem:

$$D = \frac{Df}{D-f} \Rightarrow D-f = f \Rightarrow D = 2f$$

Levando em conta a condição de $C = \frac{L}{2}$, temos:

$$\frac{L}{2} = \frac{Lf^2}{(2f-f)(2f+L-f)} \Rightarrow f(f+L) = 2f^2 \Rightarrow f+L = 2f \Rightarrow L = f$$

Portanto: $\frac{L}{f} = 1$

Respostas: a) $C = \frac{Lf^2}{(D-f)(D+L-f)}$; b) $\frac{L}{f} = 1$